técnica

CARTAS DE TRANSFORMAÇÃO EM RELATIVIDADE RESTRITA.

Transformation charts in Special Relativity.

M. ABREU FARO

BETÃO REFORÇADO COM ARMADURA METÁLICA.

Normal concrete reinforced with steel.

J. M. MADEIRA COSTA

ALGORITMO PARA OBTER UMA MÁQUINA SEQUENCIAL FINITA ESPECIFICADA POR EXPRESSÕES REGULARES.

Algorithm for the determination of a finite sequential machine specified by regular expressions.

L. T. MAGALHÃES
M. P. O. RICOU

CONTROLE DES SYSTEMS D'ENERGIE DANS UNE ENSEMBLE HYDRO-ÉLECTRIQUE.

Controlo de energia numa central hidro-eléctrica.

JOSÉ LUÍS DE OLIVEIRA PAULO

THE INFLUENCE OF SELF-WEIGHT IN THE STABILITY OF CANTILEVER COLUMNS.

A influência do peso próprio na estabilidade de colunas em «consola».

ANTÓNIO RESSANO GARCIA LAMAS

NÚMERO E COMPRIMENTO DE CICLOS NO ESPAÇO DE ESTADOS DE UM REGISTO DE DESLOCAMENTO GERAL.

Number and lenght of cycles of a general shift-register.

JOSÉ ALBERTO BAPTISTA TOMÉ

CÓNICAS. ESTUDO DAS PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS A PARTIR DA SUA EQUAÇÃO FOCAL.

Conics. Main caracteristics from their focal equation.

FERNANDO PERES RODRIGUES

associação dos estudantes do instituto superior técnico

março 1977

revista de engen

Edições da Técnica

TABELA DE PREÇOS

TABELAS PARA CÁLCULO DE BETÃO ARMADO

J. S. Brazão Farinha, 6.ª edição — 1970 . . 375$00

TOPOGRAFIA GERAL

C. Xerez — 1.º vol. 2.ª edição — 1970 . . (*)

C. Xerez — 2.º vol. 2.ª edição — 1966 . . 180$00

TABELAS TÉCNICAS

Vicente e Eng.º Brasão Farinha, 8.ª edição — 1977 (*)

MANUAL DE HIDRÁULICA GERAL

A. Lencastre, 2.ª edição — 1969 . . . . 375$00

DICIONÁRIO DE UNIDADES E TABELAS DE CONVERSÃO

Vasco Costa e Osvaldo Francês, 1.ª edição — 1959 35$00

GUIA DE ANÁLISE QUÍMICA DAS ÁGUAS

A. Herculano de Carvalho, 1.ª edição — 1961 90$00

CÁLCULO DE PÓRTICOS

G. Kani — Trad. da 7.ª edição alemã — 1962 75$00

MANUAL DE ESTRUTURAS

Brasão Farinha — 1.º VOLUME

Encadernado . . . . . 625$00

Plastificado . . . . . 587$50

2.º e 3.º Volumes . . . . . (*)

BETÃO PREESFORÇADO

(A cargo dos participantes na Semana de Betão Preesforçado — I. S. T. — 1975) . . (*)

(*) LIVROS A PUBLICAR BREVEMENTE

Desconto de 10% aos assinantes

PEDIDOS À técnica

técnica

NÚMERO 439 MARÇO DE 1977 ANO LII VOLUME XXXVIII PUBLICAÇÃO MENSAL

DIRECTOR

Delmar Baptista

COLABORADORES

António Maria da Fonseca
José Agostinho Marques
Jorge Braz
Armando Ruano
Manuel M. S. Anastácio
José Luís S. V. Azevedo
João José Águas
António Ricardo Pinto Gonçalves
Henrique José Carvalhão
Sérgio Duarte Santos (F. C. Tecnologia — Coimbra)

DIRECÇÃO, REDACÇÃO E ADMINISTRAÇÃO

Av. Rovisco Pais, I. S. T. — Lisboa
Telefone 72 93 23

PROPRIETÁRIO

A. E. I. S. T.

ASSINATURAS:	5 n.os	10 n.os
Continente e Ilhas	200$00	350$00
Países de língua Portuguesa e Espanha...	220$00	380$00
Estrangeiro	—	450$00
Número avulso ...	—	60$00

Não se publica em Agosto e Setembro.

Os artigos assinados são da exclusiva responsabilidade dos autores.

COMPOSIÇÃO E IMPRESSÃO:

OF. GRÁFICAS DE RÁDIO RENASCENÇA
Rua Duques de Bragança, 6 — LISBOA - 2

SUMÁRIO

369 — M. ABREU FARO — Cartas de transformação em relatividade restrita.

Transformation charts in Special Relativity.

383 — J. M. MADEIRA COSTA — Betão reforçado com armadura metálica.

Normal concrete reinforced with steel.

399 — L. T. MAGALHÃES e M. P. O. RICOU — Algoritmo para obter uma máquina sequencial finita especificada por expressões regulares.

Algorithm for the determination of a finite sequential machine specified by regular expressions.

407 — JOSÉ LUÍS DE OLIVEIRA PAULO — Controle des systems d'energie dans une ensemble hydro-électrique.

Controlo de energia numa central hidro-eléctrica.

427 — ANTÓNIO RESSANO GARCIA LAMAS — The influence of self-weight in the stability of cantilever columns.

A influência do peso próprio na estabilidade de colunas em «consola».

439 — JOSÉ ALBERTO BAPTISTA TOMÉ — Número e comprimento de ciclos no espaço de estados de um registo de deslocamento geral.

Number and length of cycles of a general shift-register.

445 — FERNANDO PERES RODRIGUES — Cónicas — Estudo das principais características a partir da sua equação focal.

Conics — Main caracteristics from their focal equation.

ÍNDICE ALFABÉTICO DOS ANUNCIANTES

	Pág.
Fanafel	IV
MAGUE	III
Novobra, Lda.	IV
Soc. Electricidade Brown Boveri...	V
Sociedade Portuguesa Cavan	II
S. K. F., Lda.	I
Sondagens e Fundações A. Cavaco	II

SKF

A SKF não tem apenas rolamentos de esferas e de rolos .

Temos também rolamentos de agulhas

rótulas e embutes .

Evidentemente, temos do mesmo modo toda a espécie de acessórios para rolamentos.

Além disso a SKF fabrica muitos outros produtos de qualidade.

Rodas e carretos cónicos, por exemplo

Fusos roscados de rolamento de alta precisão que transformam o movimento de rotação em linear.

Fabricamos também machos cassonetes

e brocas .

O mesmo se passa com pontos rotativos .

E muitos sabem que também temos um bom Serviço Técnico.

SOCIEDADE SKF LIMITADA

LISBOA - PRAÇA DA ALEGRIA, 66-A
TELEF.: 362301 - TELEGR.: ESKAEF - TELEX: 12156

PORTO - RUA DELFIM FERREIRA, 604
TELEF.: 692054 - TELEGR.: ESKAEF

AC-M-2

ÁGUAS SUBTERRÂNEAS

ESTUDOS · PESQUISAS
CAPTAÇÕES

Prontos
para colaborar
na reconstrução
do País

SONDAGENS E FUNDAÇÕES A. CAVACO, LDA.

RUA RODRIGO DA FONSECA, 62 · LISBOA - 1
TEL. 56 11 71/4 · TELEX 12 476 ACAVAC P · TELEG. ACAVACO

FUNDAÇÕES ESPECIAIS
ESTUDOS GEOTÉCNICOS
CAPTAÇÕES DE ÁGUA

Sopecate

ESPECIALISTA DESDE 1947

R. DO ARSENAL, 146 - 2°
Telf. 320208 - 364010 - 360437
LISBOA - 2

GUIA DE ANÁLISE QUÍMICA DAS ÁGUAS

(Potáveis, Minerais e para a Indústria)

POR A. HERCULANO DE CARVALHO
Prof. do I. S. T. e do Instituto de Hidrologia de Lisboa

Preço 90$00

CÁLCULO DE PÓRTICOS

Método de cálculo simples e rápido, entrando em linha de conta com o deslocamento dos nós

por G. Kani

Preço 75$00

Pedidos à «Técnica» *Desconto 10 % aos assinantes*

técnica

NÚMERO 439 MARÇO DE 1977 ANO LII VOLUME XXXVIII PUBLICAÇÃO MENSAL

C. D. U. 530.12:513.75/.77

Cartas de transformação em Relatividade Restrita

M. ABREU FARO
Universidade Técnica de Lisboa (I. S. T.)
Centro de Electrodinâmica (I. N. I. C.)

SUMÁRIO

Este é o último de uma série de três artigos sobre a Transformação de Lorentz publicados na «Técnica».

No primeiro apresentou-se um método geométrico de obter a referida Transformação. No segundo procedeu-se ao estabelecimento e interpretação física da Transformação de Lorentz a partir dos conceitos de velocidade relativa e dessincronização relativa.

Neste último artigo e na base dos resultados apresentados nos dois primeiros, procede-se ao estabelecimento de cartas de transformação que permitem uma transcrição imediata da cinemática observada num dado referencial para aquela que lhe corresponde e tal como se observa noutro referencial de inércia.

Ver-se-á que a partir daí é possível introduzir um critério de ordenação de acontecimentos no espaço-tempo dos dois referenciais em termos tais que esses ordenamentos se conservam na Transformação de Lorentz.

SUMMARY

This is the last of a series of three articles on the Lorentz Transformation, published in «Técnica».

In the first article, a geometric method to determine this Transformation was presented. In the second, and on the basis of the concepts of relative velocity and relative desynchronization, the Lorentz Transformation was physically established and interpreted.

In the last article, and upon the results presented in the first two, transformation charts are established which allow an immediate transcription from the kinematics observed in a given inertial frame of reference to the one which corresponds to it and exactly as it can be observed in another frame.

It will be seen that, henceforth, it will be possible to introduce a criterium for ordering the events occurring in the space-time of the two frames such that this order is maintained in the Lorentz Transformation.

1 — INTRODUÇÃO

A Transformação Especial de Lorentz

$$X = \gamma\,(x + \beta\, ct) \qquad \beta = v/c$$
$$cT = \gamma\,(ct + \beta\, x) \qquad \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} \qquad (1)$$
$$Y = y \qquad Z = z$$

referente à transformação de coordenadas entre dois referenciais de inércia, s(x, y, z,t) e S(X, Y, Z, T), é analiticamente simples.

No entanto, a correspondência expressa pelas duas primeiras equações

$$[x, t] \rightleftarrows [X, T]$$

entre variáveis do continuum espaço-tempo é tão densa de consequências que julgamos de interesse recorrer a métodos geométricos para a sua obtenção, interpretação e uso.

Preocupação semelhante norteou Minkowski, Synge, Amar, Loedel, Brehme e outros.

Como já nos referimos [1], o objectivo desta série de trabalhos é diferente daquele que presidiu à elaboração dos diagramas concebidos pelos autores referidos.

Aí tratava-se fundamentalmente de métodos geométricos ligados à transformação, em si mesma, de variáveis e sua correlação com os conceitos de rotação e covariância.

O nosso objectivo é outro. Consiste fundamentalmente no recurso a métodos geométricos que permitam obter num dado referencial, de modo simples e rápido, a imagem cinemática daquilo que noutro ocorre.

Os fenómenos representam-se em cada um dos referenciais tal como se observam. Julgamos que isto é importante pois que, sendo assim, bastará comparar as duas representações para imediatamente se inferir, na sua exacta natureza e medida, o efeito relativístico que se pretende evidenciar.

*
* *

No presente trabalho procede-se a uma prévia e breve reconsideração do método geométrico apresentado no primeiro trabalho [1], e passa-se imediatamente à apresentação de três aplicações:

— Uma que evidencia a invariância da velocidade da propagação da luz no vácuo: 2.º postulado.

— Outra em que se determina o desvio da direcção de um «raio luminoso»: aberração da luz.

— Uma última aplicação em que se evidencia e determina a variação de frequência de uma onda plana monocromática: efeito Doppler.

Além da ilustração que se pretende do método em causa, a consideração destas três aplicações visa chamar a atenção para o facto da invariância da velocidade da propagação da luz se acompanhar em geral de duas diferenças essenciais: variação de direcção e variação de frequência.

Alguma coisa há que varia, e isso permitirá aceitar com maior naturalidade o 2.º postulado.

*
* *

Posto isto, entraremos no assunto que entitula este artigo: Cartas de Transformação em Relatividade Restrita.

O método geométrico a que nos temos referido têm as suas virtudes e os seus inconvenientes.

— As virtude ligam-se fundamentalmente às propriedades geométricas que encerra e à sua fácil mecanização.

Acreditamos que terá interesse prosseguir na via da mecanização tendo em vista a concepção de modelos analógicos e a criação de meios pedagógicos para o ensino e aplicação da Relatividade Restrita.

— Os inconvenientes ligam-se à morosidade e complexidade que as construções geométricas envolvem e acabam por revestir.

*
* *

Uma vez que pelo método geométrico concebido é possível estabelecer uma correspondência bionívoca

$$[x, t] \rightleftarrows [X, T]$$

imediatamente está implícita a construção de cartas de transformação.

Nesta concepção, os sistemas de eixos, que no método considerado fizemos coincidir, separam-se.

Num dado sistema de eixos, existirá a carta que estabelecerá a correspondência com a carta do outro referencial de inércia

Tratando-se da Transformação Especial de Lorentz estas cartas envolvem apenas a transformação

$$[x, t] \rightleftarrows [X, T]$$

uma vez que para as outras variáveis se tem

$$Y = y \quad e \quad Z = z$$

Como se verá, a concepção destas cartas simplifica as coisas e, nomeadamente, permitirá introduzir um critério de ordenação de acontecimentos no espaço-tempo (x, t) e seu transformado X, T).

Evidentemente que não se trata de uma ordenação no tempo ou de uma ordenação no espaço, essas como se sabe só ganham sentido físico para intervalos, respectivamente, do género-tempo ou género-espaço.

A ordenação em causa envolve, em conjunto, espaço-tempo e suporta-se em coordenadas u_t e u_x dos pontos figurativos em cada uma das cartas.

As cartas mudam de configuração mas as coordenadas u_t e u_x de um ponto [x, t] e seu transformado [X, T] são invariantes.

*
* *

Finalmente procederemos a algumas aplicações tendentes a utilizar o uso das cartas.

Nalgumas, e como convém, serão retomadas as aplicações que utilizaram o método geométrico inicialmente considerado.

Outras serão diferentes, nomeadamente aquelas que esclarecem a essência dos efeitos conhecidos por «contracção do espaço» e «dilatação do tempo».

*
* *

Por último, desejamos salientar que nesta série de trabalhos nos limitámos aos aspectos cinemáticos da Transformação de Lorentz, não cabendo aqui a interpretação física e particular dos fenómenos considerados. Apenas nos limitamos a evidenciar efeitos cinemáticos que, no entanto, e pela sua generalidade, estão subjacentes a uma variedade grande e diversa de fenómenos físicos.

2 — MÉTODO GEOMÉTRICO DE OBTENÇÃO DA TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ

2.1 — Resumo

Consideremos a fig. 1.

Seja «a» um ponto de coordenadas

a [x, y, z, t]

Para se obter o transformado «A» de coordenadas

A [X, Y, Z, T]

procede-se do modo seguinte:

No plano (x, t) faz-se passar por [x, t] uma recta r_x de direcção $-\psi/2$ em relação ao eixo dos x e em que

$$\tan \psi/2 = \frac{\gamma - 1}{\beta\gamma} \qquad (2)$$

Esta recta intersecta o eixo dos t em P_0.

Por P_0 faz-se passar a recta R_x de direcção $+\psi/2$ em relação ao eixos dos X.

Analogamente, faz-se passar por [x, t] a recta r_t de direcção $-\psi/2$ em relação ao eixo dos t.

Esta recta intersecta o eixo dos x em Q_0.

Por Q_0 faz-se passar a recta R_t de direcção $+\psi/2$ em relação ao eixo dos T.

R_x intersecta R_t no transformado [X, T] de [x, t].

Note-se que se fizeram coincidir e se mantiveram os sentidos positivos de eixos homólogos.

*
* *

Tratando-se da Transformação Especial de Lorentz, (1), Y e Z obtém-se imediatamente

$$Y = y$$
$$Z = z$$

O método é geral e para uma dada relação

$$\beta = v/c$$

utiliza sempre as direcções $\pm\psi/2$ e o facto de a transformada de uma recta r_x ser uma R_x.

Estas rectas intersectam-se num ponto comum dos eixos dos t e dos T que se fizeram coincidir; o mesmo se verifica com as rectas r_t e R_t em relação a um ponto comum dos eixos dos x e dos X.

*
* *

É este, em resumo, o método que foi apresentado em [1].

Convém-nos ainda ressaltar as seguintes propriedades.

— Seja «d» um ponto na vizinhança de «a» e «D» e «A» os seus transformados, então

$$\overline{ac} = \overline{AC}$$
$$\overline{ab} = \overline{AB}$$

o que significa que as componentes do vector $\overrightarrow{ad}$ segundo os eixos [a, (r_x, r_t)] são iguais às componentes homólogas do vector $\overrightarrow{AD}$ segundo os eixos [A, (R_x, R_t)].

— Uma vez que a transformada «O» da origem «o» coincide com «o» segue-se que as componentes do vector $\overrightarrow{oa}$ segundo [o, (r_x, r_t)] são iguais às componentes homólogas do vector $\overrightarrow{OA}$ segundo [O, (R_x, R_t].

*
* *

Na fig. 1 o desenho foi feito à escala e corresponde a $\beta = v/c = 0{,}6$. Toma-se sempre $c = 1$, o que significa que o tempo é medido em unidades métricas de comprimento.

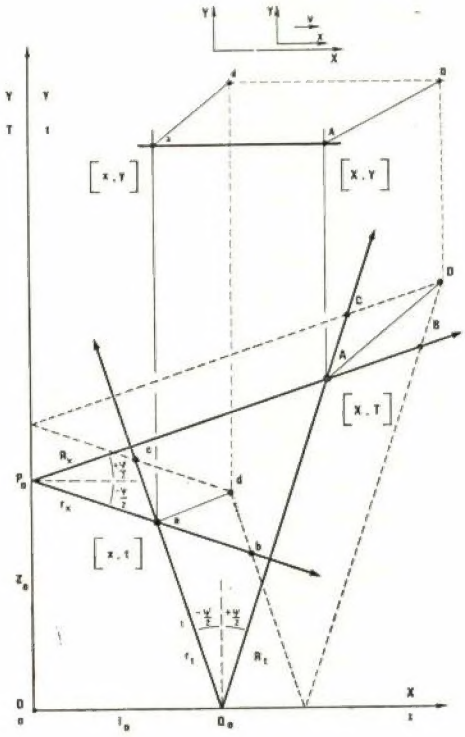


Fig. 1

Método geométrico de obtenção da Transformação de Lorentz e em que os eixos homólogos dos dois referenciais se fazem coincidir

*
* *

No alto da fig. 1 representa-se a transformação

$$[x, y] \rightleftarrows [X, Y]$$

que é imediata uma vez que

$$Y = y.$$

*
* *

Neste método a representação de um acontecimento nos referenciais s(x, y, z, t) e S(X, Y, Z, T) faz-se a partir dos pares

$$[x, t] \quad [x, y] \quad [x, z]$$

e seus transformados

$$[X, T] \quad [X, Y] \quad [X, Z]$$

Todas as figuras estão particularizadas para

$$z = Z = o$$

*

* *

Na fig. 2 traduz-se graficamente o resultado de uma experiência que confirmaria o método apresentado.

Para $\beta = v/c = 0{,}6$ e $c = 1$ a Transformação de Lorentz, (1) reveste a forma

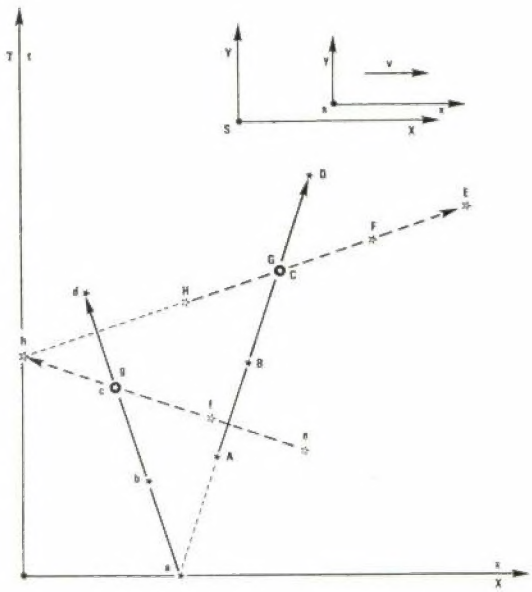


Fig. 2

Em s (x, y, z, t) duas sequências de ocorrências respectivamente de velocidade ($-\tan \psi/2$) e desincronização ($-\tan \psi/2$) definem o acontecimento $c \equiv g$. Em S (X, Y, Z, T) correspondem-lhes sequências de velocidade ($+\tan \psi/2$) e dessincronização ($+\tan \psi/2$) que definem o acontecimento $C \equiv G$)

$$X = 1{,}25 \ (x + 0{,}6 \ t)$$
$$x = 1{,}25 \ (t + 0{,}6 \ x) \qquad (3)$$

e $\tan \psi/2$ assume o valor

$$\tan \psi/2 = 1/3$$

Notemos que as rectas r_t e R_t são do género-tempo e traduzem a história de uma partícula que movendo-se em s (x, y, z, t) com velocidade

$$u = -\tan \psi/2$$

segundo o eixo dos x se observa em S(X, Y, Z, T) com velocidade

$$U = +\tan \psi/2$$

segundo o eixo dos X.

As rectas r_x e R_x são do género-espaço e traduzem a história de acontecimentos ocorrendo em s (x, y, z, t) com uma dessincronização

$$d = -\tan \psi/2$$

segundo o eixo dos t e se observam em S(X, Y, Z, T) com uma dessincronização

$$D = +\tan \psi/2$$

segundo o eixo dos T.

*

* *

Posto isto, consideremos quatro ocorrências a, b, c, d em s(x, y, z, t) a que correspondem quatro ocorrências A, B, C, D em S(X, Y, Z, T).

Teremos:

Ocorrência	x	t	Ocorrência	X	T
a	5	0	A	6,25	3,75
b	4	3	B	7,25	6,75
c	3	6	C	8,25	9,75
d	2	9	D	9,25	12,75

Os valores de x e t foram arbitrados em termos de se observar uma velocidade

$$u = -\tan \psi/2 = -1/3$$

na evolução espacial x(t) das ocorrências.

Os valores de X e T foram calculados a partir de (3) e revelam uma velocidade

$$U = +\tan \psi/2 = +1/3$$

na evolução X(T) das ocorrências A, B, C, D.

Se a série de ocorrências a, b, c, d fosse estabelecida em s e se registasse em S a correspondente série A, B, C, D, imediatamente se verificaria, por extrapolação, que a recta R_t passa por ($X = 5$, $T = 0$)

*

* *

Seguidamente poder-se-ia organizar em s (x,y,z,t) uma série de ocorrências e, f, g, h a que corresponderia em S (X, Y, Z, T) a série E, F, G, H.

Teríamos:

Ocorrência	x	t	Ocorrência	X	T
e	9	4	E	14,25	11,75
f	6	5	F	11,25	10,75
g	3	6	G	8,25	9,75
h	0	7	H	5,25	8,75

x e t foram arbitrados de modo a que se tenha uma dessincronização

$$d = -\tan \psi/2 = -1/3$$

na cronologia t(x) das ocorrências.

Os valores de X e T, calculados a partir de (3), revelam uma dessincronização

$$D = \tan \psi/2 = 1/3$$

na cronologia X (T) de E, F, G, H.

Por extrapolação verificar-se-ia que a recta R_x passa por (X = 0, T = 7).

É interessante notar que em S(X; Y; Z; T) a sequência e, f, g, h gerada em s(x, y, z, t) se observa ordenada no tempo por ordem inversa: H, G, F, E.

*

* *

Finalmente e como confirmação do método verifica-se que as rectas r_t e r_x se intersectam nas ocorrências

$$c \equiv g$$

e que decorrentemente as rectas R_t e R_x se intersectam nas ocorrências

$$C \equiv G$$

Isto significa que as coordenadas (x, t) de c e g são as mesmas, tal como sucede com as coordenadas (X, T) de C e G.

[X, T] é deste modo o transformado de [x, t] e inversamente.

*

* *

A fig. 2 além de traduzir uma experiência possível, constitui-se também como elemento útil para apreensão do método. Será fácil verificar que cada um dos pontos [x, t] se transforma em [X, T] de acordo com o método geométrico considerado.

Tal como se referiu em [1], também será instrutivo obter as transformações a partir da mecanização aí preconizada.

2.2 — Aplicações

2.2.1 — Invariância da velocidade de propagação da luz, no vácuo

Consideremos em s(x, y, z, t) e no plano (x, y) uma fonte onde a partir da ocorrência «p» se constitui uma onda de natureza electromagnética, fig. 3.

De acordo com o 2.º postulado será uma onda esférica de raio

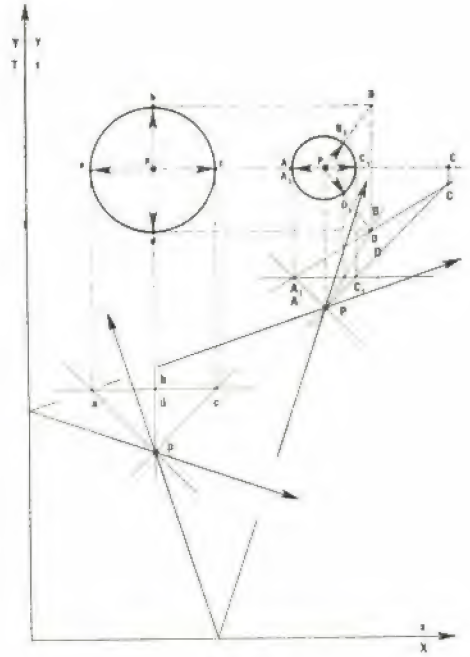


Fig. 3

Invariância da velocidade de propagação da luz no vácuo. Da figura ressalta o fenómeno da aberração da luz.

$$r(t) = c(t - t_p) = t - t_p \qquad c = 1$$

Na fig. 3 representa-se uma secção dessa superfície esférica e consideram-se quatro pontos a, b, c e d correspondentes a quatro possíveis direcções de radiação.

No plano (x, t) esses pontos situam-se sobre uma recta

$$t = \text{const.}^{\text{a}} = t_a = t_b = t_c = t_d$$

De acordo com o 2.º postulado, e uma vez que c = 1,

$$t_a - t_p = \overline{pa}, \quad t_b - t_p = \overline{pb}, \quad \text{etc.}$$

*

* *

Recorrendo ao método geométrico apresentado, começa-se por determinar no plano (X, T) os pontos A, B, C e D e, seguidamente, a sua versão no plano (X, Y). Imediatamente se verifica que

$$\frac{\overline{PA}}{T_A - T_P} = \frac{\overline{PB}}{T_B - T_P} = \frac{\overline{PC}}{T_C - T_P} = \frac{\overline{PD}}{T_D - T_P} = c = 1$$

o que nos revela a invariância da velocidade de propagação de sinais electromagnéticos no vácuo.

Em S(X, Y, Z, T) também se observará uma onda esférica mas para evidenciar esse facto há que

considerar pontos A_1, B_1, C_1 e D_1 correspondentes a um tempo constante T_1.

Na figura fez-se coincidir

$$T_1 = T_A = T_{A_1} = T_{B_1} = T_{C_1} = T_{D_1}$$

Procedendo assim, imediatamente se verifica que esses pontos $A_1 B_1 C_1 D_1$ existem numa esfera de centro P e raio

$$R = c\ (T_1 - T_p)$$

2.2.2 — Aberração da luz

Na aplicação anterior já ressaltou o fenómeno correntemente designado por aberração da luz.

Na realidade, e para direcções que não coincidam com as da velocidade relativa v, observa-se uma variação na direcção de um raio luminoso quando observado em cada um dos referenciais. Compare-se, por exemplo, e na fig. 3, a direcção $\overrightarrow{pb}$ no plano (x, y) com a direcção $\overrightarrow{PB}$ no plano (X, Y).

Na fig. 4 analisa-se o que se passa para uma direcção φ em s(x, y, z, t) e que se transforma numa direcção Φ em S(X, Y, Z, T).

Y (x) traduz a trajectória rectilínea de um de raio luminoso pelo que

$$\frac{\overline{ab}}{t_b - t_a} = c = 1$$

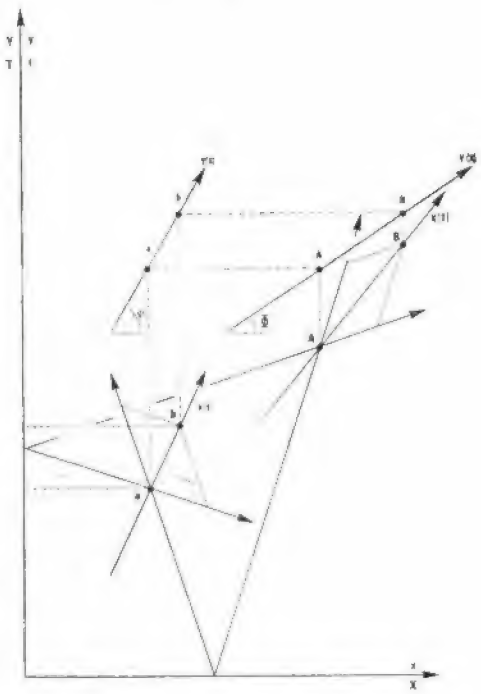


Fig. 4

Aberração de luz. Um raio luminoso é observado em s (x, y, z, t) segundo a direcção φ. Em S (X, Y, Z, T) é observado segundo a direcção Φ.

Utilizando o método geométrico e, nomeadamente, a propriedade das componentes $\overrightarrow{ab}$ nos eixos $[a, (r_x, r_t)]$ serem iguais às componentes homólogas de $\overrightarrow{AB}$ nos eixos $[A, (R_x, R_t)]$, imediatamente se obtém a direcção Φ.

Estas direcções são medidas pelo ângulo que a direcção do raio luminoso e segundo o sentido de propagação faz com o eixo dos x ou dos X e segundo os sentidos positivos desses eixos.

Como é bem conhecido o ângulo Φ fica definido pelas equações:

$$\cos \Phi = \frac{\cos \varphi + \beta}{1 + \beta \cos \varphi}$$

$$\text{sen}\ \Phi = \frac{\text{sen}\ \varphi\ \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \cos \varphi} \qquad (4)$$

No caso da fig. 4:

$$\beta = v/c = 0{,}6 \quad \text{e} \quad \varphi = 60^\circ$$

Utilizando as fórmulas (4) obtém-se

$$\Phi = 32^\circ{,}2$$

o que está em perfeita concordância com a determinação gráfica de Y (X) e ângulo Φ associado, fig. 4.

2.2.3 — Efeito Doppler

Na fig. 5 analisa-se o efeito Doppler relativo a uma onda plana monocromática no vácuo.

Para tanto, considera-se em s(x, y, z, t) uma frente de onda definida em (x, y) pela recta $\overline{a_o b_o}$ e outra frente de onda $\overline{c_o d_o}$ tomada no mesmo instante t_o.

Sendo assim, a distância l entre essas rectas mede o comprimento de onda em s

$$l = \lambda_s$$

No plano (x, t), a_o b_o, c_o e d_o existem numa recta de tempo constante

$$t = t_o$$

No instante t_s a frente de onda a_o b_o estará em a_1 b_1 e, tratando-se de uma onda plana monocromática no vácuo,

$$\frac{\overline{a_o a_1}}{t_1 - t_o} = \frac{\overline{b_o b_1}}{t_1 - t_o} = \frac{\lambda_s}{t_1 - t_o} = c = 1$$

Isto significa que $(t_1 - t_0)$ mede o período T_s e, portanto, e como se sabe

$$\frac{\lambda_s}{T_s} = c$$

o que equivale a

$$\lambda_s \, f_s = c$$

em que f_s traduz a frequência.

No plano (x, t) a_1 e b_1 situam-se sobre uma recta de tempo constante

$$t = t_1$$

*

* *

Posto isto determinam-se em S (X, Y, Z, T), e no plano (X, Y), as trajectórias de $\overline{A_0 A_1}$ e $\overline{B_0 B_1}$. É um problema idêntico àquele que se resolveu no caso da aberração da luz, fig. 4.

Determinam-se em seguida os transformados de c_0 e d_0 que nos planos (X, T) e (X, Y) terão trajectórias paralelas às de $\overline{A_0 A_1}$ e $\overline{B_0 B_1}$.

A fim de que se evidenciem em S(X, Y, Z, T) frentes de onda há que tomar as trajectórias de A_0, B_0, C_0 e D_0 para um tempo constante T_2.

Foi o que se fez e a fim de que esses pontos se distingam claramente dos outros vão assinalados com um índice superior

$$A^2, B^2, C^2 \text{ e } D^2$$

A recta definida por $\overline{A^2 B^2}$ representa uma frente de onda, a recta definida por $\overline{C^2 D^2}$ representa a outra frente de onda.

A distância L entre essas frentes de onda traduz o comprimento de onda em S (X, Y, Z, T)

$$L = \lambda_S$$

Como seria de esperar essas frentes de onda, planos correspondentes a fase constante, são ortogonais às direcções de propagação

$$\overrightarrow{A_0 A_1}, \overrightarrow{B_0 B_1} \quad \text{etc.}$$

uma vez que a velocidade de propagação é $c = 1$

Como

$$L \neq 1$$

imediatamente se evidencia o efeito Doppler.

Evidencia-se também, e mais uma vez, a aberração da luz.

*

* *

Podemos comprovar os resultados obtidos com aqueles que decorrem de fórmulas bem conhecidas.

Assim, além das fórmulas (4) já anteriormente consideradas e que definem a aberração da luz:

$$\cos \Phi = \frac{\cos \varphi + \beta}{1 + \beta \cos \varphi}$$

$$\text{sen } \Phi = \frac{\text{sen } \varphi \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \cos \varphi} \qquad (4)$$

há que considerar a fórmula que nos exprime o efeito Doppler relativamente ao comprimento de onda e que é

$$\lambda_S = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \cos \varphi} \lambda_s \qquad (5)$$

No caso considerado na fig. 5:

$$\beta = 0{,}6$$
$$\varphi = -135^\circ$$
$$\lambda_s = 1$$

Utilizando as fórmulas (4) e (5) obtém-se:

$$\Phi = -100^\circ{,}7$$
$$\lambda_S = 1{,}39$$

o que está em perfeita concordância com as determinações constantes da fig. 5.

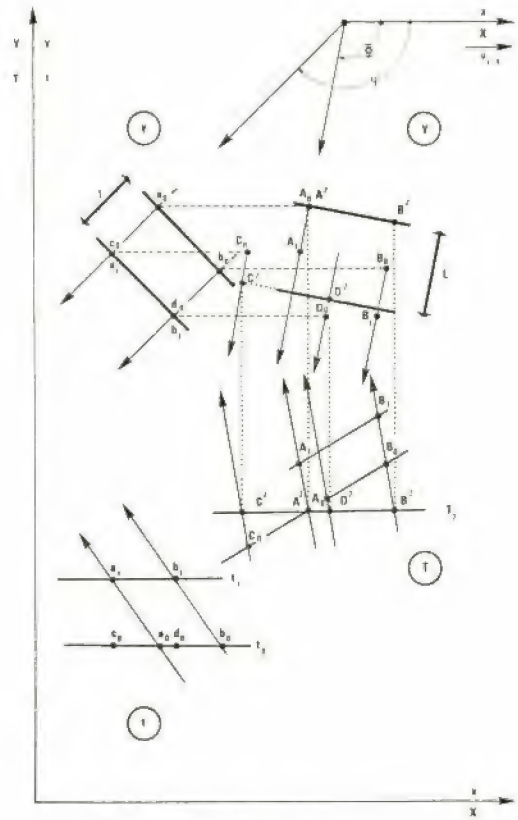


Fig. 5

Efeito Doppler. Uma onda electromagnética plana monocromática de comprimento de onda $\lambda_s = 1$ em s (x, y, z, t) quando observada em S (X, Y, Z, T) apresenta um comprimento de onda $\lambda_s = L$. Da figura ressalta também o fenómeno da aberração da luz

*

* *

Finalmente convém salientar que a representação gráfica tem potencialidades que vão muito além das determinações a que procedemos.

Quer qualitativamente quer quantitativamente a fig. 5 revela factos e pormenores que a transformação analítica operada sobre o formalismo de uma onda não revelaria.

Exactamente o que tem interesse é a partir daquilo que geometricamente se evidencia voltar uma vez mais ao rigor analítico a fim de demonstrar e interpretar fisicamente os factos observados.

3 — CARTAS DE TRANSFORMAÇÃO

3.1 — Estabelecimento de cartas de transformação

Estabelecem-se facilmente. Resultam directamente das propriedades do método geométrico referido na secção 1. Concretamente, do facto das componentes do vector $\overrightarrow{OA}$, no plano (X, T), e segundo os eixos $[O, (R_x, R_t)]$, serem iguais às componentes homólogas do vector $\overrightarrow{oa}$, no plano (x, t) segundo os eixos $[o, (r_x, r_t)]$, fig. 1.

Sendo assim, consideremos na fig. 6 dois sistemas de eixos, agora separados e, para maior facilidade de transcrição, resultantes de um deslisamento de $\overrightarrow{ox}$ em $\overrightarrow{OX}$. É uma disposição cómoda uma vez que $Y = y$.

Designando por

$$u_x \text{ e } u_t$$

as componentes de $\overrightarrow{oa}$ segundo $[o, (r_x, r_t)]$, as componentes de $\overrightarrow{OA}$ segundo $[O, (R_x, R_t)]$ serão também e respectivamente

$$u_x \text{ e } u_t$$

A carta de transformação estabelece-se então do modo seguinte:

Consideremos em $s(x, y, z, t)$, plano (x, t), o ponto

$$p(x, t)$$

a que corresponde o par

$$(u_x, u_t)$$

Bastará em $S(X, Y, Z, T)$, no plano (X, T), e segundo $[O, (R_x, R_t)]$, marcar as mesmas coordenadas

$$(u_x, u_t)$$

que assim definem

$$P(X, T)$$

Utilizando um reticulado a transcrição é imediata. Com a maior simplicidade, e por intermédio dos reticulados associados a cada um dos sistemas de eixos, se obtêm as transformações

$$[x, t] \rightleftarrows [X, T]$$

e seguidamente

$$[x, y] \rightleftarrows [X, Y]$$

uma vez que

$$Y = y$$

*

* *

Do exposto resulta que a uma sucessão de ocorrências que em $s(x, y, z, t)$, e no plano (x, t), interesse um conjunto de paralelogramos elementares, corresponde uma sucessão de ocorrências em $S(X, Y, Z, T)$, e no plano (X, T), interessando, e pela mesma ordem, paralelogramos elementares correspondentes: a mesma linha e a mesma coluna, fig. 6.

É assim possível, e segundo o critério enunciado, ordenar ocorrências entre o espaço-tempo (x, t) e o espaço-tempo (X, T).

O ordenamento em (x, t) é o mesmo que se observa em (X, T) uma vez que u_x e u_t se mantêm invariantes, embora correspondendo a sistemas diversos de coordenadas oblíquas.

Esta ordenação envolve conjuntamente «espaço» e «tempo».

Como é bem conhecido, uma ordenação no espaço só ganha sentido e se mantém para intervalos do género-espaço e uma ordenação no tempo só ganha sentido e se mantém para intervalos do género-tempo.

A ordenação considerada visa fundamentalmente o estabelecimento de uma correspondência entre a carta $[o, (r_x, r_t)]$ associada a (x, t) e a carta $[O, (R_x, R_t]$ associada a (X, T) o que pontualmente se faz através das variáveis u_x e u_t que se mantêm invariantes e de modo mais expedito, e por interpolação, através de paralelogramos elementares correspondentes.

Estabelecidas estas cartas a transcrição da cinemática de $s(x, y, z, t)$ em $S(X, Y, Z, T)$ é imediata uma vez que

$$Y = y \text{ e } Z = z$$

3.2 — Propriedades das cartas estabelecidas

3.2.1 — Relações básicas

Tem interesse explorar as propriedades geométricas e métricas das cartas consideradas.

Consideremos a fig. 6.

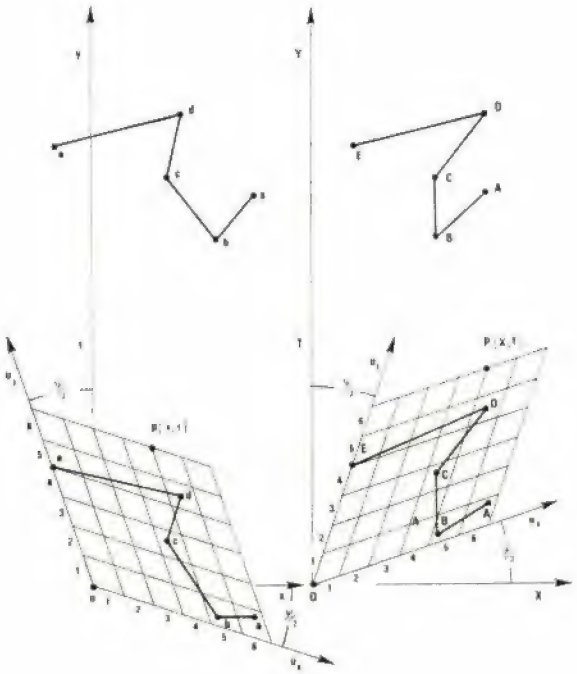


Fig. 6

Cartas de transformação. Resultam do método geométrico representado na fig. 1. Em relação ao sistema de eixos de coordenadas oblíquas [o, (r_x, r_t)] e [O, (R_X, R_T)] as coordenadas u_x e u_t mantêm-se invariantes. Através de reticulados de paralelogramos correspondentes a transcrição de [x, t] em [X, T] é imediata, e inversamente.

É fácil estabelecer as seguintes relações:

$$x = u_x \cos \psi/2 - u_t \operatorname{sen} \psi/2$$
$$t = -u_x \operatorname{sen} \psi/2 + u_t \cos \psi/2 \qquad (7)$$

e

$$X = u_x \cos \psi/2 + u_t \operatorname{sen} \psi/2$$
$$T = u_x \operatorname{sen} \psi/2 + u_t \cos \psi/2 \qquad (8)$$

de onde, por inversão, resulta, respectivamente:

$$u_x = \frac{1}{\cos \psi} (x \cos \psi/2 + t \operatorname{sen} \psi/2)$$
$$u_t = \frac{1}{\cos \psi} (x \operatorname{sen} \psi/2 + t \cos \psi/2) \qquad (9)$$

e

$$u_x = \frac{1}{\cos \psi} (X \cos \psi/2 - T \operatorname{sen} \psi/2)$$
$$u_t = \frac{1}{\cos \psi} (-X \operatorname{sen} \psi/2 + T \cos \psi/2) \qquad (10)$$

Como se sabe, (2),

$$\tan \psi/2 = \frac{\gamma - 1}{\beta\gamma}$$

de onde se conclui que

$$\cos \psi = \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \beta^2} \qquad (11)$$

e

$$\operatorname{sen} \psi = \beta \qquad (12)$$

Posto isto, podemos estabelecer algumas propriedades interessantes.

*
* *

3.2.2 — Direcções notáveis

Consideremos o sistema de equações (9) que diferenciamos na base de

$$x = \text{const.}^a$$

Dividindo membro a membro, obtém-se:

$$\frac{\Delta u_x}{\Delta u_t} = \tan \psi/2$$

De modo semelhante se obteriam as relações que correspondem a $t = \text{const.}^a$, $X = \text{const.}^a$ e $T = \text{const.}^a$.

Em resumo, teremos as seguintes transformações:

Carta [o, (r_x, r_t)]	Carta [O, (R_x, R_t)]
$x = \text{const.}^a$	$\frac{\Delta u_x}{\Delta u_t} = \tan \psi/2$
$t = \text{const.}^a$	$\frac{\Delta u_t}{\Delta u_x} = \tan \psi/2$
$\frac{\Delta u_x}{\Delta u_t} = \tan \psi/2$	$X = \text{const.}^a$
$\frac{\Delta u_t}{\Delta u_x} = \tan \psi/2$	$T = \text{const.}^a$

(13)

A interpretação é imediata e permite com a maior simplicidade traçar numa das cartas as direcções correspondentes a espaço ou tempo constante da outra.

3.2.3 — Intervalo entre acontecimentos

Consideremos o quadrado do intervalo entre acontecimentos, Δs^2, que constitui o invariante fundamental da Relatividade Restrita:

$$\Delta s^2 = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) - c^2\Delta t^2 = (\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2) - c^2\Delta T^2 \qquad (14)$$

No caso da Transformação Especial de Lorentz

$$\Delta Y = \Delta y \qquad e \qquad \Delta Z = \Delta z$$

pelo que também é invariante o intervalo dos acontecimentos projectados nos planos (x, t) e (X, T) e que designamos por Δs_{xt}

$$\Delta s^2_{xt} = \Delta x^2 - c^2\ \Delta t^2 = \Delta X^2 - c^2 \Delta T^2 \qquad (15)$$

Como se tomou c = 1 teremos ainda

$$\Delta s^2_{xt} = \Delta x^2 - \Delta t^2 = \Delta X^2 - \Delta T^2 \qquad (16)$$

A partir de (7) e (8) e tendo em consideração que

$$\cos \psi = \sqrt{1 - \beta^2}$$

é fácil concluir que

$$\Delta s^2_{xt} = \Delta x^2 - \Delta t^2 = \Delta X^2 - \Delta T^2 = \sqrt{1-\beta^2}\ (\Delta u^2_x - \Delta u^2_t) \qquad (17)$$

A relação (17) dá-nos, assim, a expressão do intervalo Δs_{xt} da Transformação Especial de Lorentz em função das variações das coordenadas u_x e u_y. É pois uma relação importante.

3.2.4 — Interpretação física

Consideremos três referenciais:

S (X, Y, Z, T) $\quad s_0\ (x_0, y_0, z_0, t_0) \quad$ s (x, y, z, t)

Admitamos que:

A velocidade de S em relação a s_0 é $\quad -v_1 = -\tan \psi/2$

(18)

A velocidade de s em relação a s_0 é $\quad v_2 = +\tan \psi/2$

Isto é equivalente a dizer-se que:

A velocidade de s em relação a s_0 é $\quad v_2 = +\tan \psi/2$

(19)

A velocidade de s_0 em relação a S é $\quad v_1 = +\tan \psi/2$

Pela lei de composição das velocidades, a velocidade v_3 de s em relação a S será dada por

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1\ v_2}{c^2}}$$

o que atendendo ao facto de c = 1 e tendo em consideração os valores de v_1 e v_2 equivale a

$$v_3 = \frac{2\ \tan \psi/2}{1 + \tan^2 \psi/2} = \operatorname{sen} \psi = \beta = \frac{v}{c} = v \qquad (20)$$

Assim se conclui que s está animado de velocidade v em relação a S pelo que a transformação de coordenadas

$$[x, y, z, t] \rightleftarrows [X, Y, Z, T]$$

é exactamente aquela que tem sido objecto de análise.

Determinemos agora as transformações:

$$[X, T] \rightarrow [x_0, t_0]$$

$$[x, t] \rightarrow [x_0, t_0]$$

A partir das relações (19) e aplicando a Transformação Especial de Lorentz obtém-se para a primeira transformação:

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \tan^2 \psi/2}}\ (X - \tan \psi/2\ T)$$
$$t_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \tan^2 \psi/2}}\ (T - \tan \psi/2\ X) \qquad (21)$$

e para a segunda:

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \tan^2 \psi/2}}\ (x + \tan \psi/2\ t)$$
$$t_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \tan^2 \psi/2}}\ (t + \tan \psi/2\ x) \qquad (22)$$

Considerando as equações (9) verificamos que se podem escrever sob a forma:

$$u_x = \frac{\cos \psi/2}{\cos \psi}\ (x + \tan \psi/2\ t)$$
$$u_t = \frac{\cos \psi/2}{\cos \psi}\ (t + \tan \psi/2\ x) \qquad (23)$$

Pederíamos conferir às equações (10) um tratamento análogo.

Conclui-se daqui que as coordenadas (u_x, u_t) das cartas consideradas são, à parte um factor constante, as coordenada (x_0, t_0) no sistema $s_0\ (x_0, y_0, z_0, t_0)$, em relação ao qual os referenciais S (X, Y, Z, T) e s (x, y, z, t) estão animados, respectivamente, de velocidades relativas $(-\tan \psi/2)$ e $(+\tan \psi/2)$.

Esse factor de escala, como resulta de (22) e (23), é dado por

$$\frac{x_0}{u_x} = \frac{t_0}{u_t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \tan^2 \psi/2}}\ \frac{\cos \psi}{\cos \psi/2} =$$

$$= \sqrt{\cos \psi} = \sqrt[4]{1 - \beta^2} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \qquad (24)$$

o que está de acordo com (17). De facto devemos ter:

$$\Delta s^2_{xt} = x^2 - t^2 = X^2 - T^2 = x_0^2 - t_0^2 = \frac{u_x^2}{\gamma} - \frac{u_t^2}{\gamma} =$$

$$= \frac{1}{\gamma}(u_x^2 - u_t^2) = \sqrt{1-\beta^2}\,(u_x^2 - u_t^2)$$

o que coincide com (17) para variações em relação às origens das coordenadas.

*
* *

Em última análise, isto significa que as coordenadas (u_x, u_y) se mantêm invariantes porque são, à parte um factor de escala, as coordenadas no mesmo referencial, $s_0\,(x_0, y_0, z_0, t_0)$, dos acontecimentos que em $s(x, y, z, t)$ e $S(X, Y, Z, T)$ têm as coordenadas (x, t) e (X, T).

4 — UTILIZAÇÃO DAS CARTAS

4.1 — Transformação de uma velocidade. Intervalo entre acontecimentos.

Consideremos a fig. 8 onde no plano (x, y) se representa uma trajectória rectilínea: $y\,(x)$.

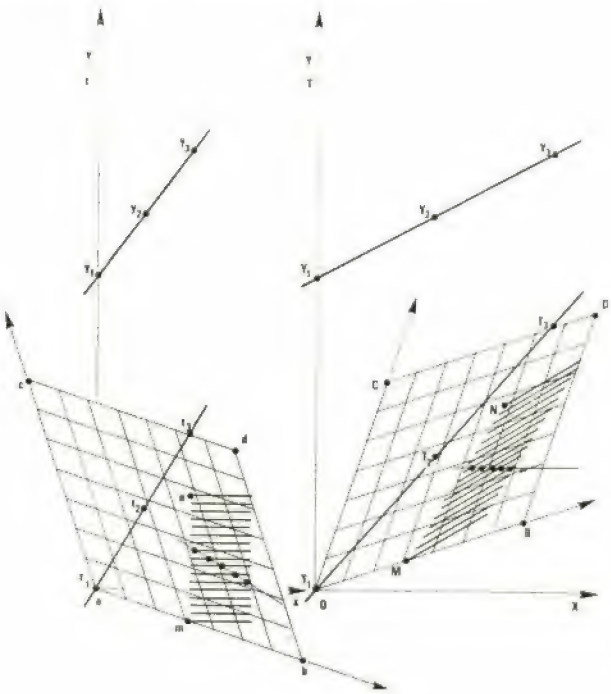


Fig. 7

Utilização das cartas de transformação para o estudo da trajectória $[y(x), t(x)]$ e sua transformada $[Y(X), T(X)]$ Experiência revelando a contracção do espaço e a dilatação do tempo.

Em baixo, sobre a carta correspondente a $\beta = v/c = 0{,}6$, traçou-se a correspondente trajectória no plano $((x, t)$.

Imediatamente se verifica que:

$$\frac{\overline{y_2\,y_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\overline{y_3\,y_2}}{t_3 - t_2} = c = 1$$

A partir do reticulado transcrevem-se os pontos $t_1\,t_2\,t_3$ para o reticulado da outra carta o que conduz a $T_1\,T_2\,T_3$.

Utilizando o facto de $Y = y$ determina-se imediatamente a trajectória $Y\,(X)$, verificando-se que

$$\frac{\overline{Y_2\,Y_1}}{T_2 - T_1} = \frac{\overline{Y_3\,Y_2}}{T_3 - T_2} = c = 1$$

A velocidade de Y mantém-se invariante uma vez que é igual a $c = 1$. A variação de direcção segue a lei da fórmula (4) que nos dá a aberração da luz:

$$\cos\,\Phi = \frac{\cos\varphi + \beta}{1 + \beta\,\cos\varphi}$$

Neste caso temos $\cos\varphi = 0{,}6$ e $\beta = 0{,}6$ o que conduz a $\cos\Phi = 0{,}88$ que é o que de facto se observa

*
* *

Consideremos agora o intervalo Δs_{xt} entre os acontecimentos 3 e 2:

$$\Delta s^2_{xt} = (x_3 - x_2)^2 - (t_3 - t_2)^2 = (3 - 1{,}5)^2 - (5 - 2{,}5)^2 =$$
$$= 2{,}25 - 6{,}25 = -4$$

$$\Delta s^2_{xt} = (X_3 - X_2)^2 - (T_3 - T_2)^2 =$$
$$= (7{,}5 - 3{,}75)^2 - (8{,}5 - 4{,}25)^2 = 14{,}06 - 18{,}06 = -4$$

$$\Delta s^2_{xt} = \sqrt{1-\beta^2}\;[(u_{x_3} - u_{x_2})^2 - (u_{t_2} - u_{t_2})^2] =$$
$$= 0{,}8\;[(5{,}5 - 2{,}75)^2 - (7{,}1 - 3{,}55)^2] =$$
$$= 0{,}8\;[7{,}56 - 12{,}60] = -0{,}8\,.\,5{,}04 = -4{,}03$$

Os valores de u_x e u_y foram obtidos do reticulado verificando-se uma boa concordância com os valores de Δs^2_{xt} calculados a partir de (x, t) e (X, T).

Se calculássemos o intervalo Δs

$$\Delta s^2 = (\Delta x^2 + \Delta y^2) - \Delta t^2 = (\Delta X^2 + \Delta Y^2) - \Delta T^2$$

obtínhamos um valor nulo uma vez que y e Y se deslocam com a velocidade da luz no vácuo.

4.2 — Contracção do espaço. Dilatação do tempo

Consideremos uma vez mais a fig. 6.

Uma barra de comprimento 2 colocada sobre o eixo dos x ilumina-se completamente em 17 instantes entre $t=1$ e $t=3$, inclusive.

É o que representa na carta.

Procede-se em seguida à transcrição e obtém-se 17 segmentos interessando espaço-tempo, (X, T), e com uma inclinação

$$\frac{\Delta u_t}{\Delta u_x} = \tan \psi/2 = 1/3$$

uma vez que cada segmento corresponde a $t = \text{const.}^{\circ}$ e $\beta = 0{,}6$.

Suponhamos que para $T = 4$ se fazia um registo em S (X, Y, Z, T), obtinham-se 5 pontos ou seja uma série de pontos correspondentes a 5 imagens instantâneas ocorridas em s (x, y, z, t).

Se em vez de 17 imagens, dispuséssemos de um número infinito de imagens o resultado tenderia para

$$\sqrt{1-\beta^2}\ 1 = 0{,}8 \,.\, 2 = 1{,}6 = L$$

Observa-se assim uma contracção de $\sqrt{1-\beta^2}$ do comprimento próprio da barra que é de 2 unidades: $L = \sqrt{1-\beta^2}\ 1$.

A representação gráfica é suficientemente elucidativa para explicar a essência do fenómeno.

Na realidade o que se passa é o seguinte:

A imagem do que se regista em S (X, Y, Z, T) é a síntese de imagens instantâneas em s (x, y, z, t) segmentos ocupando espaço-tempo e com inclinação

$$\frac{\Delta u_t}{\Delta u_x} = \tan \psi/2$$

*

* *

Da figura ressalta também o facto bem conhecido da dilatação do tempo:

$$T_N - T_M = \frac{t_n - t_m}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{4}{0{,}8} = 5$$

Em S (X, Y, Z, T) os acontecimentos N e M ocorrem em locais diversos

$$X_M \neq X_N$$

O intervalo de tempo afigura-se assim dilatado em relação ao tempo próprio.

$$t_n - t_m = 4$$

correspondente à fluência do tempo no ponto

$$x = x_m = x_n \qquad y = o \qquad z = o$$

Existem diversas experiências que fisicamente evidenciam o facto. Neste caso não apresentamos nenhuma e limitamo-nos a verificar o que ocorre, em face da definição de tempo próprio e do modo como a recta

$$x = x_n = x_m = \text{const.}^{\circ}$$

se transcreve para a carta do referencial S.

4.3 — Transformação de frentes de onda

Consideremos a fig. 8 onde os pontos 1 e 3 refinem uma frente de onda plana para o instante $t_1 = t_3 = o$.

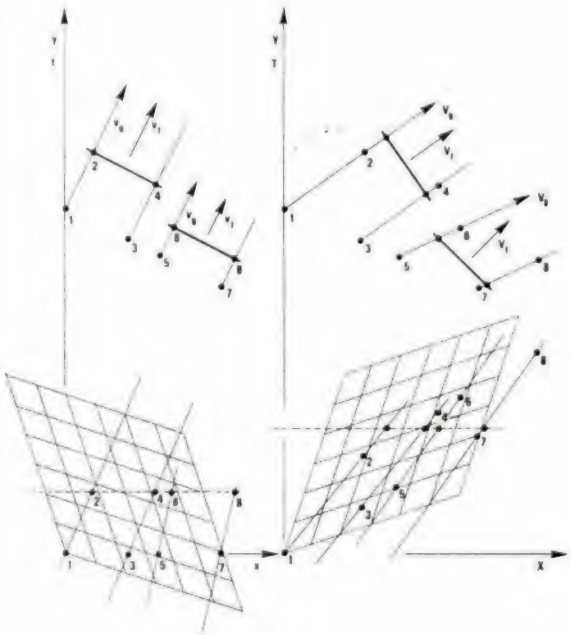


Fig. 8

Transformação de frentes de onda correspondentes a velocidades de fase $v_f = c$ e $v_f = 0{,}5$ c.
No primeiro caso as velocidades v_f e v_g mantêm paralelas.
No segundo caso já assim não sucede

Cada um dos pontos desloca-se com uma velocidade V_g normal à frente de onda e, portanto, paralela e igual à velocidade de fase V_f.

$$V_g = V_f = c = 1$$

No instante $t=2$ os pontos 1 e 3 ocupam as posições 2 e 4 no plano (x, y).

De modo idêntico 5 e 7 definem no instante $t = o$ uma frente de onda plana. Deslocam-se também com uma velocidade igual e paralela à velocidade de fase mas neste caso:

$$V_g = V_f = 0{,}5\ c = 0{,}5$$

Transcrevemos o spontos (1, 3) (2, 4) (5, 7) e (6, 8) para o reticulado da carta associada a S (X, Y, Z, T) e utilizando o facto de Y = y imediatamente se obtêm no plano (X, Y) as configurações dos pontos transformados.

Afinal e em última análise, as trajectórias de (1, 3) e de (5, 7).

A tracejado representa-se um instante T a que correspondem, portanto, nessas trajectórias pontos existentes em frentes de onda.

Para cada conjunto essa frente de onda que é plana, dada a linearidade das transformações, vai assinalada por uma barra.

Para o conjunto (1, 3) e S (X, Y, Z, T) continuamos a ter V_g paralelo a V_f e $V_g = V_f = c = 1$.

Para a outra configuração (5, 7) a velocidade V_g deixa de ser paralela a V_f.

Quaisquer destes resultados é bem conhecido, [8], mas tem interesse verificar a simplicidade com que são evidenciados nas cartas.

Uma vez que o nosso objectivo é, neste momento, apresentar um método de representação da cinemática em dado referencial e a sua transcrição para outro referencial não examinaremos tudo quanto está implícito e se revela da fig. 5 e que é muito.

As configurações concebidas são adequadas ao estudo de fenómenos ondulatórios. Valem em abstrato sob o aspecto cinemático e a interpretação física dependerá, como é óbvio, do fenómeno em causa.

5 — CONCLUSÃO

Em última análise, conclui-se o seguinte:

— O método geométrico apresentado em [1] é um método expedito para a determinação da Transformação Especial de Lorentz e susceptível de uma fácil mecanização.

— No entanto, e em relação ao objectivo visado, as cartas de transformação são muito mais eficientes quer em rapidez de procedimento quer em simplicidade figurativa.

— A qualquer dos procedimentos está subjacente uma interpretação física que lhes confere um interesse que vai além das pontecialidades de determinação da Transformação de Lorentz e da representação da cinemática dos fenómenos.

— Os métodos considerados são facilmente extensíveis à Transformação Geral de Lorentz.

— Os métodos apresentados oferecem-se de interesse e são aplicáveis ao estudo da transformação de outros quadrivectores que não simplesmente o espaço-tempo. São deste modo úteis para a verificação da covariância das leis da Física.

REFERÊNCIAS:

[1] Abreu Faro, M.: A Geometrical and Mechanical Method to Determine Lorentz Transformations. «Técnica», 436 (1976).

[2] Abreu Faro, M.: Estabelecimento e Interpreta- Física da Transformação de Lorentz. «Técnica», 438 (1977).

[3] Amar, H.: New Geometric Representation of the Lorentz Transformation. «Am. J. Phys.» 23: 487, (1955).

[4] Brehme, R. W.: A Geometric Representation of Galilean and Lorentz Transformations. «Am. J. Phys.» 30: 489, (1962).

[5] Brehme, R. W.: Geometric Representations of the Lorentz Transformation — «Am. J. Phys» 32: 233, (1964).

[6] Loedel, E.: Aberration y Relatividad. «Anales de la Sociedade Argentina» 145: 3, 1948).

[7] Loedel, E.: Geometric Represenation of the Lorentz Transformation. «Am. J. Phys.» 25: 327, (1957).

[8] Moller, C.: The Theory of Relativity — «Clarendon Press» — Oxford — 1972.

[9] Shadowitz, A.: Special Relativity. (W. B. Saunders, Philadelphia — London — Toronto, 1969).

[10] Synge, J. L.: Relativity: The Special Theory North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1965.

Na próxima TÉCNICA poderá ler:

«Algumas Considerações sobre o Plano Económico 1977»

Marco António Monteiro de Oliveira

«Nota Técnica sobre a Utilização Industrial dos Cristais Líquidos em Dispositivos Electroópticos»

Grupo de Cristais Líquidos do Instituto de Física e Matemática

«Equivalência Cíclica na Interacção de Registo de Deslocamento»

José Alberto Baptista Tomé

«Betão Normal Reforçado com Armadura Metálica» (continuação)

Madeira e Costa

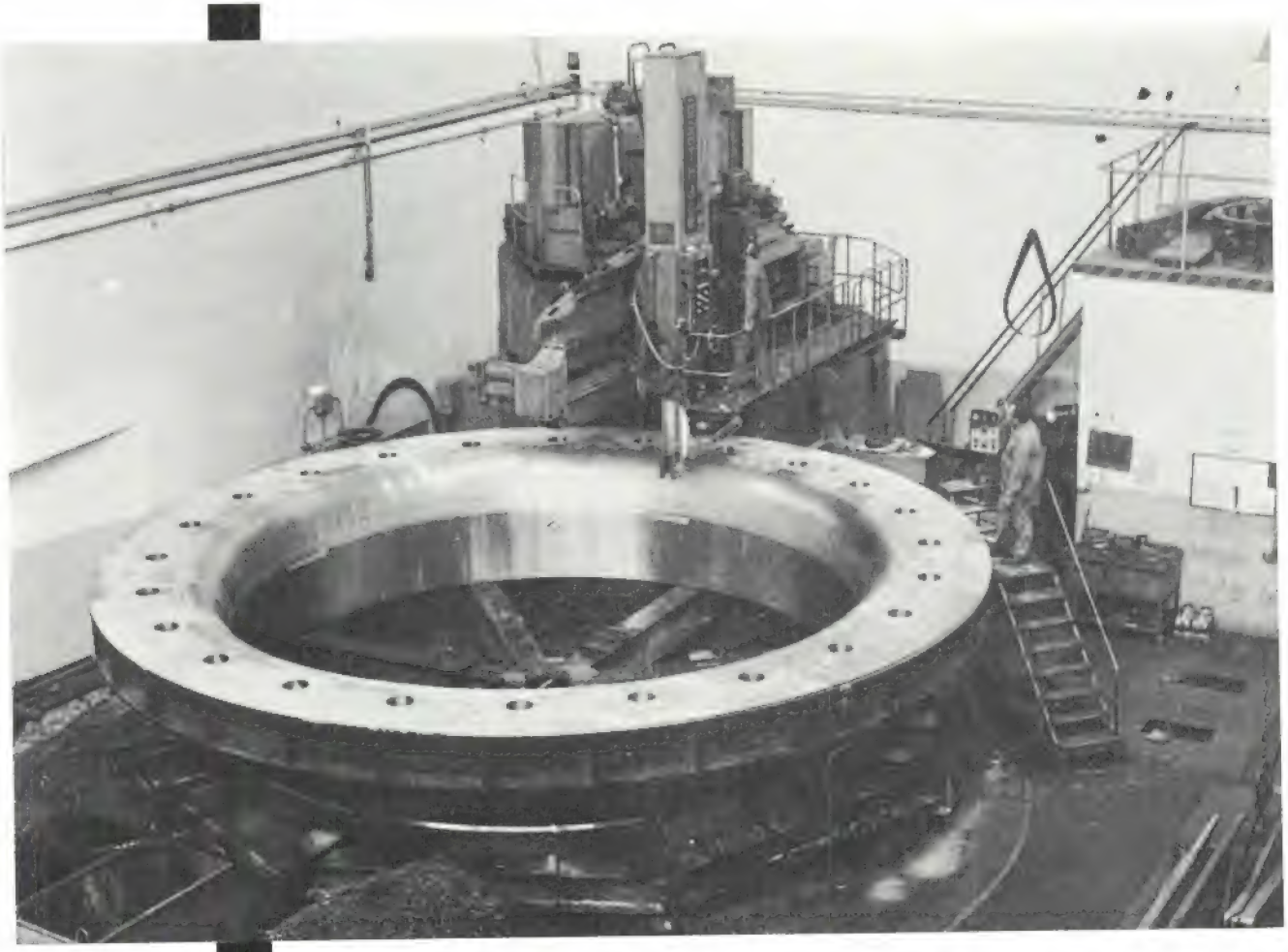
«Les Circuits Electroniques de Puissance et Leurs Modèles»

H. Buyse

«Simulação Numérica das Estatisticas de Maxwell-Boltzman, Bose-Einstein e Fermi-Dirac baseada num gerador de números pseudo-aleatórios»

H. J. Abreu Santos

MAGUE



«Maquinagem do anel inferior do Distribuidor de 1 das 3 turbinas Kaplan de 113 740 CV para a Central da Valeira.»

PONTES ROLANTES, GUINDASTES E APAR. DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS	*Projecto e fabrico*
TURBINAS HIDRÁULICAS	*Fabrico segundo licença de A. C. M. de Vevey, S. A.*
TURBINAS A VAPOR	*Fabrico segundo licença de Brown Boveri, Cie.*
CALDEIRAS A VAPOR	*Projecto e fabrico segundo licença de Foster Wheeler, Co.*
EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS	

CONSTRUÇÕES METALOMECANICAS MAGUE S.A.R.L.

ALVERCA DO RIBATEJO — PORTUGAL

FANAFEL

FÁBRICA NACIONAL DE FELTROS INDUSTRIAIS
SOCIEDADE LIMITADA
TELEF. 5 20 91/2/3 OVAR - PORTUGAL TELEG. FELTROS

FELTROS TECIDOS
TECIDOS FILTRANTES E INDUSTRIAIS

de fibras naturais ou sintéticas, puras ou em mistura
em qualquer formato e dimensão
para

Indústria papeleira
Pastas para papel
Fibrocimento
Curtumes
Industriais têxteis
Estamparia
Acabamentos
Lavandarias
Hospitais e Hotéis
Lonas em sintético

Correias transportadoras
Indústrias químicas
Filtração de água
Cervejas
Refrigerantes
Lacticínios
Azeite e produtos oleosos
Produtos gordurosos
Geleias

Vinhos
Açúcar
Farinhas alimentares
Sabões e detergentes
Cerâmicas
Captação e recuperação de poeiras
Despoeiragens
Tubos de ventilação
etc., etc., etc.

OS NOSSOS SERVIÇOS TÉCNICOS ESTÃO SEMPRE À VOSSA INTEIRA DISPOSIÇÃO PARA ESTUDAR QUALQUER PROBLEMA DE TECIDOS INDUSTRIAIS

PRÉ-FABRICAÇÃO
em betão

MOITA

EDIFÍCIOS ESCOLARES
HABITAÇÃO SOCIAL
ESCRITÓRIOS
FÁBRICAS
MORADIAS
ETC.

materiais novobra

Fábricas em: Lisboa, Leiria, Lagoa, Guarda, Moita, Luanda e Lourenço Marques
Stands de exposição em: Aveiro, Évora e Faro
Sede: Av. Est. Unidos da América, 100, 5.º - Dto. - Lisboa 5
Telefones - Serviços Administrativos: 77 48 32 - 77 29 53 · Telex: 18375 Novoba P
Serviços Técnicos: 71 41 16/7/8 - 71 93 31/2

CONSTRUA COM CONFIANÇA - CONSULTE-NOS

MEXIA HEITOR E BRASÃO FARINHA

TABELAS PARA O CÁLCULO DO BETÃO ARMADO

TECNICA
revista da associação dos estudantes do Instituto Superior Técnico
LISBOA

NÚMERO 439 MARÇO DE 1977 ANO LII VOLUME XXXVIII

C. D. U. 624.07[012.4]2

Betão normal reforçado com armadura metálica

Betão armado - Betão armado/pré-esforçado - Betão pré-esforçado

J. M. MADEIRA COSTA
Engenheiro Civil

SUMÁRIO

Neste estudo apresenta-se uma visão geral, mas integrada, do dimensionamento de secções à flexão, abordando sucessivamente: — o domínio de acção do material; estudo da fissuração; fórmulas gerais de dimensionamento por tensões de segurança; comportamento dinâmico; definição da relação conveniente entre a armadura passiva e a armadura activa; análise da deformação, definição de secção económica, análise da situação de rotura; considerações finais.

SUMMARY

This paper is dealing with a general study of reinforced concrete (Classe IV), prestressed concrete (Classe I), and reinforced concrete with prestressing tendons (Classe III), regarding members sustaining both bending and direct axial load.

1. INTRODUÇÃO

— Nas primeiras décadas deste Século o «betão armado» e o «betão pré-esforçado», mercê de investigadores de grande mérito, sofreram uma evolução notável e fixaram-se marcadamente na arte de construir hodierna.

— A metodologia científica foi respeitada, as propriedades intrínsecas dos materiais foram detectadas, mensuradas e consideradas na concepção das obras.

> Estava intrínseco o espírito de Leonard de Vinci — «Vaine me semble toute science, non issue de l'expérience, Mére de toute certitude».

Mas experiência, é também mas não só, experimentação laboratorial; — no laboratório da vida os modelos são à escala natural e incluem todos os parâmetros próprios.

— Só o conhecimento e o sentido das potencialidades do material permitiu realizações como as assinadas por Freyssinet, Nervi, Candela, Lin, Leonhardt, Corbusier, Buckminster Fuller, Morandi, Torroja, e tantos outros e, entre nós, como exemplo, pelo Prof. Edgar Cardoso. No mesmo sentido se teria inscrito, com muito mérito, a persistente acção do Prof. Lobo Fialho, recentemente falecido.

De projecção internacional tem sido a acção desenvolvida pelos Eng.os Manuel Rocha, Ferry Borges, Laginha Serafim...

Aos já referidos, aos Eng.os Sousa Coutinho, Correia de Araújo, Campos e Matos, Vasco Costa, Ulpio do Nascimento, Brito Folque, Arga e Lima, José Marrecas, Ruy Gomes, Manuel Duarte Gaspar, Marciano Guerreiro, António Franco e Abreu, A. F. Silveira, Brasão Farinha, Cavaleiro e Silva, Tomaz Mateus... e, a tantos outros, deve a engenharia civil portuguesa algumas importantes contribuições.

São de Nervi as seguintes palavras: «On voit clairement que ce sont les intuitions statiques et construtives qui guidérent Brunelleschi dans la determination du profil de la coupole, de la masse du lanterneau et du rapport volumétrique entre ces deux éléments, origine de la merveilleuse harmonie qui, aprés tant de siècles, nous bouleverse si profondément.»

— A triologia quase institucionalizada entre nós de «um a sentir, outro calculando, dez fiscalizando» é obstáculo insuperável na busca das potencialidades de cada material e, portanto, na realização da obra de arte e, da mesma forma, na criação de técnicas especificamente nacionais.

Uma profissão que passa por cima da sua própria deontologia, autodestroi-se.

O Editorial da última «Técnica» da autoria do Prof. Delgado Domingos merece referência muito especial pela sua autenticidade. Mas a investigação terá dois objectivos essenciais ou a formação humana ou a formação de tecnologias. Neste último domínio a investigação, terá de demarcar corajosamente a sua actuação e ser apoio, em fraternidade e em sigilo, da produção e não seu garrote.

* * *

— Os materiais betão armado e betão pré-esforçado foram tratados, numa primeira fase, um tanto divorciadamente mas, essencialmente a partir de princípios de linearidade (a lei de Hooke, o princípio de Navier-Bernouilli).

Foram estabelecidos os conceitos de «Fase I» (todo o material à compressão ou baixas tracções); «Fase II» (despreza-se o betão na zona traccionada»; «Fase III» (situação de rotura) e coeficiente de homogeneização $m = Ea/Eb$.

— Os vastíssimos contributos de Faury, Bolomey, Füller, Vicat, Feret, Abrams no domínio da tecnologia do betão, e de Timoshenko, Belluzzi, Mörsch, Magnel, Terzaghi, Guyon, Massonet, Montoya, Moreira da Rocha, Telemaco Van Langendok e tantos outros, abordando analiticamente vastíssimos domínios das estruturas permitiu a implantação, com tratamento científico/matemático, deste material.

Entre nós, neste sentido, e desde há alguns anos, há a salientar, pelo menos, a acção do Prof. Eduardo Arantes e Oliveira.

— Pode dizer-se que o conceito predominante então, era de conhecer, com aproximação suficiente, o comportamento dos materiais na zona da sua utilização prática e garantir afastamento suficiente desta zona, da zona correspondente aos estados limites últimos.

Mais recentemente, tentou-se, meritoriamente, identificar os dois materiais betão armado e betão pré-esforçado e abrangê-los num mesmo corpo de doutrinas. Mas, simultaneamente, com o incremento dos computadores e das teorias de rotura houve tentativa de se estabelecerem metodologias que permitissem acompanhar o comportamento dos materiais desde uma fase de tensões nascentes até aos limites da rotura.

Não tendo havido a acompanhar estas tentativas de tratamento matemáticos, o acompanhamento de teorias físicas ligadas ao comportamento da matéria, caíu-se num barroquismo conceitual e apontou-se, predominante, à análise de estados limites últimos. O comportamento satisfatório dos elementos na zona de utilização, é garantido essencialmente por recomendações de tipo construtivo. Tais recomendações resultantes de investigação pontual são normalmente desconexas e de difícil interpretação global.

Demais grande parte dos conceitos em que se apoiava a doutrinação clássica eram já conceitos de rotura e, porventura, em certos domínios, mais evoluídos que os actuais.

— Cerca de 1959 foi o autor incumbido pelo L. N. E. C. da redacção das «C. I. T. 29», que constituem ainda hoje, ao que sabemos, as únicas instruções normativas existentes no País no domínio do Pré-Esforçado.

Pela mesma altura, tinha o autor realizado no mesmo organismo, um estudo sobre «Causas de fractura de parafusos em bielas de motores» e tinham corrido cerca de 1956, sob visão directa e muito cuidadosa do Eng.º Tavares de Castro «Estudos de aços para betão armado em vigas submetidas à flexão simples».

Entre 1959 e 1960 conduziu o autor os «primeiros ensaios realizados no País, em regime estático e dinâmico, de carruagens de caminho de ferro» e o estudo de comportamento «duma estrutura sem vigas para Edifícios Escolares». Em missão chefiada pelo Eng.º Ferry Borges foi redigido em co-autoria o relatório do «Estudo do comportamento das construções quando do sismo de Agadir».

Pela mesma data e em resultado do estudo da eficiência de várias metodologias na compactação de solos levou o autor a escrever algumas notas sobre o comportamento de «pneus». Parece haver uma similitude perfeita entre o comportamento dum «pneu» e dum elemento de betão armado pré-esforçado sujeito a solicitações dinâmicas.

Destas preocupações, aparentemente dispares e desconexas, resultaram alguns princípios redigidos então e, que o autor tem aplicado e testado com frequência.

No estudo sobre dimensionamento de estruturas anti-sísmicas apresentado pelo autor em conferência no L. N. E. C., e incluido na Memória 208 publicada em 1963, e em que pela primeira vez se evidenciava a importância das deformações não elásticas no comportamento das estruturas de betão armado aos sismos, estavam implícitos os referidos princípios.

Foram os mesmos aplicados na primeira fase das obras da Lisnave (em edifícios e docas e muros cais); foram aplicados no recém-construido Casino Park Hotel do Funchal em projecto variante do autor; estão na base da conferência proferida em Novembro de 1976 nas «1.ª Jornadas de Engenharia Civil do I. S. E. L.».

Com algumas sistematizações embora, e com apoio da «Revista Técnica» vão ser apresentados sucinta e sucessivamente tais princípios.

Alguns capítulos estão escritos nas notas originais com bastante mais detalhe mas pretende-se aqui tão somente apresentar uma perspectiva de conjunto.

O «betão armado», o «betão armado/pré-esforçado» e o «betão pré-esforçado» aparecem integrados num material que, para sistematização, se designa de **«Betão Normal Reforçado com Armadura Metálica»**.

— A passagem do «betão armado» ao «pré-esforçado» faz-se sucessivamente sem descontinuidade e, se também aqui o povo tem razão, — no meio está a virtude — não será razoável classificar o betão armado/pré-esforçado de «Classe III», quando se verifica que este material, convenientemente dimensionado, apresenta aptidões singulares.

Em qualquer material haverá que definir o seu domínio e em materiais resultante da combinação betão/aço há que tratar com pormenor a «fissuração».

Aqui será tentado, e em capítulos sucessivos, estabelece-se o domínio de actuação dos materiais, estabelece-se uma teoria de fendilhação, estabelece-se uma teoria de comportamento dinâmico, analisa-se a situação de rotura, estabelecem-se critérios de economia, estabelecem-se fórmulas gerais de dimensionamento mas sempre numa ideia de integração dos diferentes capítulos.

Será preocupação constante a mensagem que segue a que se atribue marcante valor e elegância.

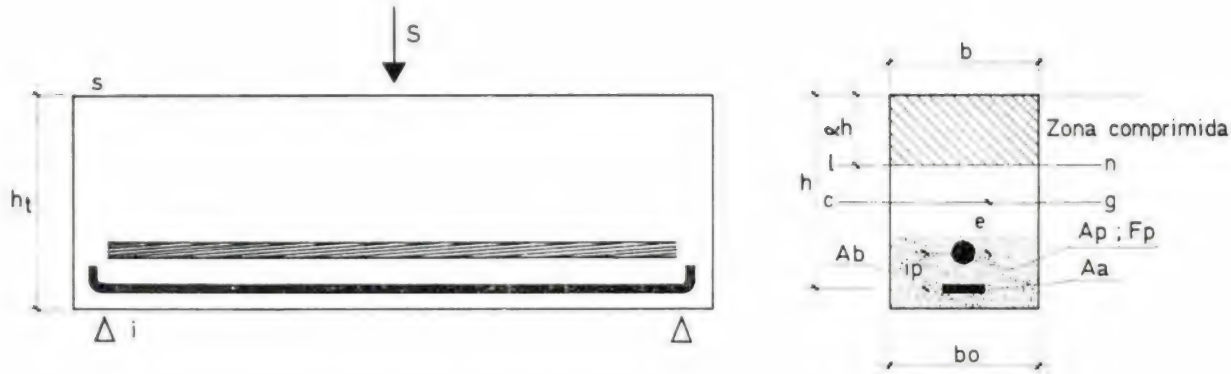
«Il n'existe pour moi que deux sources d'information: la perception directe des faits et l'intuition.

Je tiens que, privée de l'appui de l'expérience, la déduction mathématique n'est qu'une source d'erreurs, d'autant plus dangereuse qu'elle est pleine d'attraits. J'ai par ailleurs assez longuemente flirté avec cette séduisante sirène pour savoir quelles prodigieuses délices elle peut dispenser à ses adorateurs. Mais qu'ils prennent garde: l'abus de ces plaisirs à la fois solitaires et stériles constitue un onanisme intellectuel qui, aussi vite que l'autre, conduit ses victimes au pire abrutissement.»

EUGENE FREYSSINET»

2 — SITUAÇÃO GENÉRICA

Considere-se a viga genérica representada na fig. 2.1.



Ab — área de betão envolvendo a armadura.

M — momento flector actuando na secção.

N — esforço axial actuando na secção.

Fp — força de pré-esforço na secção.

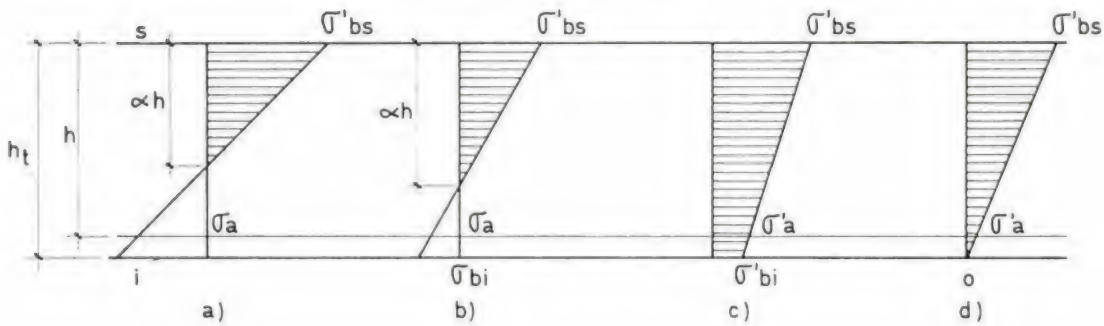
Aa — armadura passiva.

Ap — armadura activa.

ip — distância entre Aa e Ap.

e — distância de Ap a cg.

Diagramas correntes de tensões



Diagramas possíveis

Betão armado (só Aa)

só actuação de M — diagrama tipo a).

actuação de M + N — diagramas tipos b); c) ou d).

Betão pré-esforçado (só Ap)

tanto para M como M + N — diagramas tipos c) ou d); eventualmente b) com σbi reduzido (< 30 kgf/cm^2).

Betão armado / pré-esforçado (existência de Aa e Ap)

tanto para M como M + N — o diagrama b) é o mais representativo embora ocorram os diagramas c) e d).

Fig. 2.1

O referido elemento estrutural pode dispor, em teoria, somente de armadura normal de betão armado $\underline{A}_a$, somente armadura de pré-esforço $\underline{A}_p$ ou, simultaneamente, de ambas $\underline{A}_a + \underline{A}_p$.

No que se segue e, existindo $\underline{A}_a$ e $\underline{A}_p$, a armadura $\underline{A}_a$ será também designada por «armadura passiva» e a armadura $\underline{A}_p$ por «armadura activa».

A actuação de solicitações exteriores vai submeter uma secção genérica do elemento a esforços. Neste estudo serão considerados, essencialmente, actuando na secção, momentos flectores e esforços axiais de compressão. Admitindo a lei de Hooke e a hipótese de Navier-Bernouilli estes esforços vão submeter a secção a diagramas de tensões com o aspecto indicado na fig. 2.1. Nestes diagramas considera-se, como normalmente, nula a resistência do betão à tracção «Fase II».

Nas situações c) e d) e, mesmo b) para pequenos valores de σ_{b1}, os diagramas de tensões podem obter-se das bem conhecidas expressões da resistência de materiais.

Para o caso de secções rectangulares, será:

$$\sigma_i^s = -\frac{F_p}{b\,h_t} \pm \frac{6\,.\,F_p\,.\,e}{b\,.\,h_t^2} - \frac{N}{b\,.\,h_t}$$

O esforço axial (N) só será considerado quando especificamente indicado.

A situação d) é designada correntemente por «situação de descompressão» e o momento (M) que a produz «momento de descompressão» (M_d).

Nos domínios de utilização as situações a) e b) são essencialmente comandados por considerações de limitação da fissuração.

Em qualquer das situações deve atender-se, quando for caso, ao comportamento dinâmico do elemento estrutural.

O R. E. B. A. considera as seguintes situações no que se refere a fissuração aceitável:

0,10 mm — ambiente agressivo
0,20 mm — em estruturas não protegidas
0,30 mm — em estruturas protegidas

Indica-se como informação prática que, conhecida a localização duma fenda, a vista humana consegue detectá-la, para aberturas da ordem de 0,01 mm. Não sendo conhecida a sua localização são detectáveis à vista desarmada, fendas da ordem de 0,02 mm.

Refere-se, desde já, que considerações de «Classes» como faz o C. E. B. não parece ter qualquer conteúdo válido e parece prejudicial, por deformante da real posição do problema, como se verá.

3 — ZONAS CARACTERÍSTICAS DO MATERIAL

3.1 — Divisão genérica

Na fig. 3.1 tenta-se representar «zonas características» do material.

No eixo das ordenadas representa-se a tensão σ_a na armadura normal ou passiva; no eixo das abcissas a relação A_b/A_a ou, o seu inverso, $\omega_a = A_a/A_b$.

Note-se que a relação A_b/A_a se mostra muito mais esclarecedora sob esta forma que na inversa ω_a, como é tradicional.

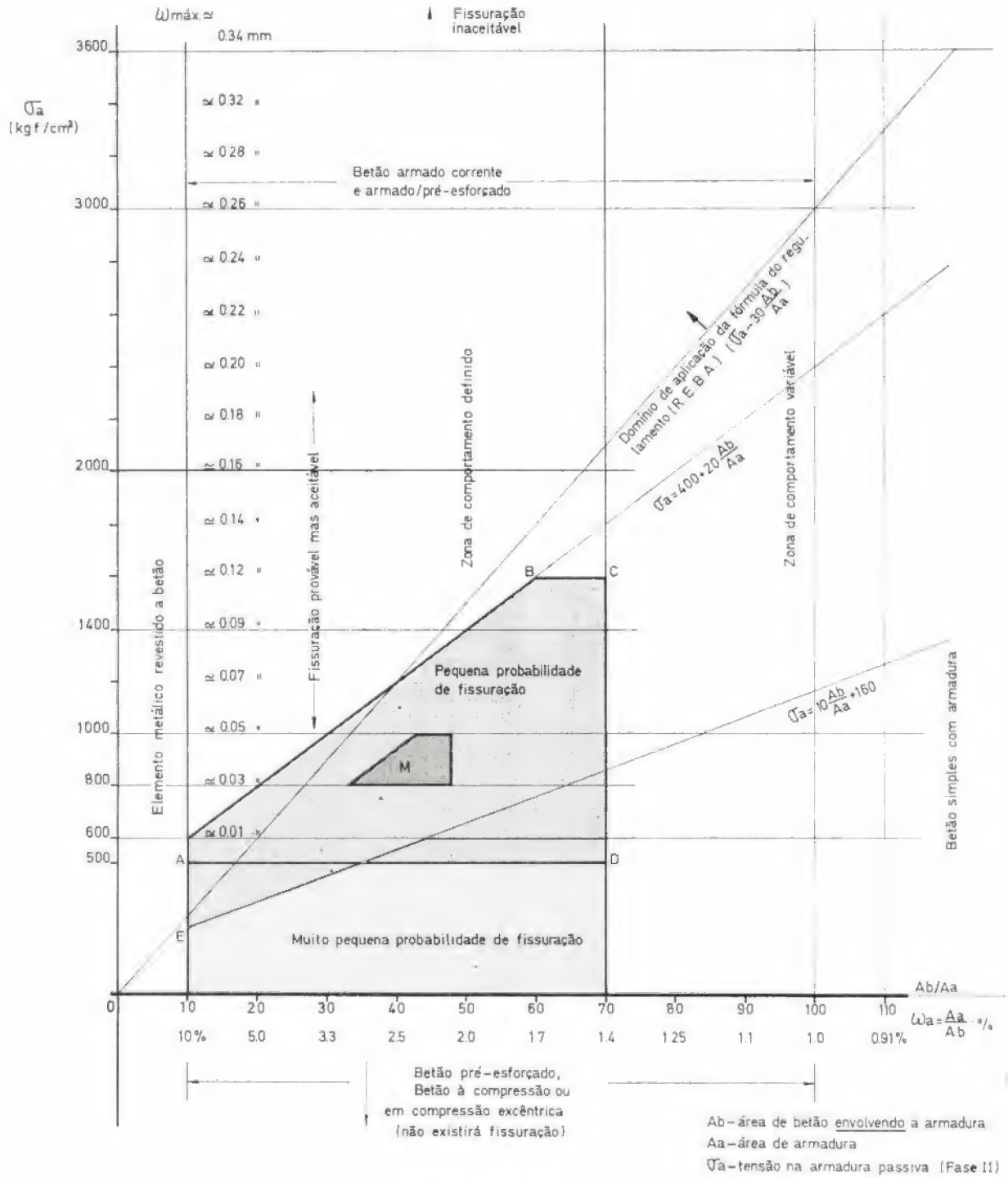


Fig. 3.1

No que se segue, A_b representa a área de betão envolvendo directamente a armadura e influenciada por esta, e não a área total do betão. É, normalmente, uma área traccionada tanto em betão armado como em betão armado pré-esforçado.

Na fig. 3.2 apresentam-se cortes representando várias proporções da relação A_b/A_a.

Como se verifica relações de A_b/A_a menores que 10 devem corresponder a situações extremas em betão armado por excesso de armadura. Da mesma forma, relações de A_b/A_a maiores que 110 devem corresponder a situações extremas, por excesso de betão.

No presente estudo é a «zona 2» que mais interessa e que se subdividiu em duas:

2.a) — entre 10 e 70 — que se designou «zona de comportamento definido»;

2.b) — entre 70 e 100 — que se designou «zona de comportamento variável».

A zona 2.a é a mais representativa deste material e onde é possível controlar com segurança aceitável o seu comportamento.

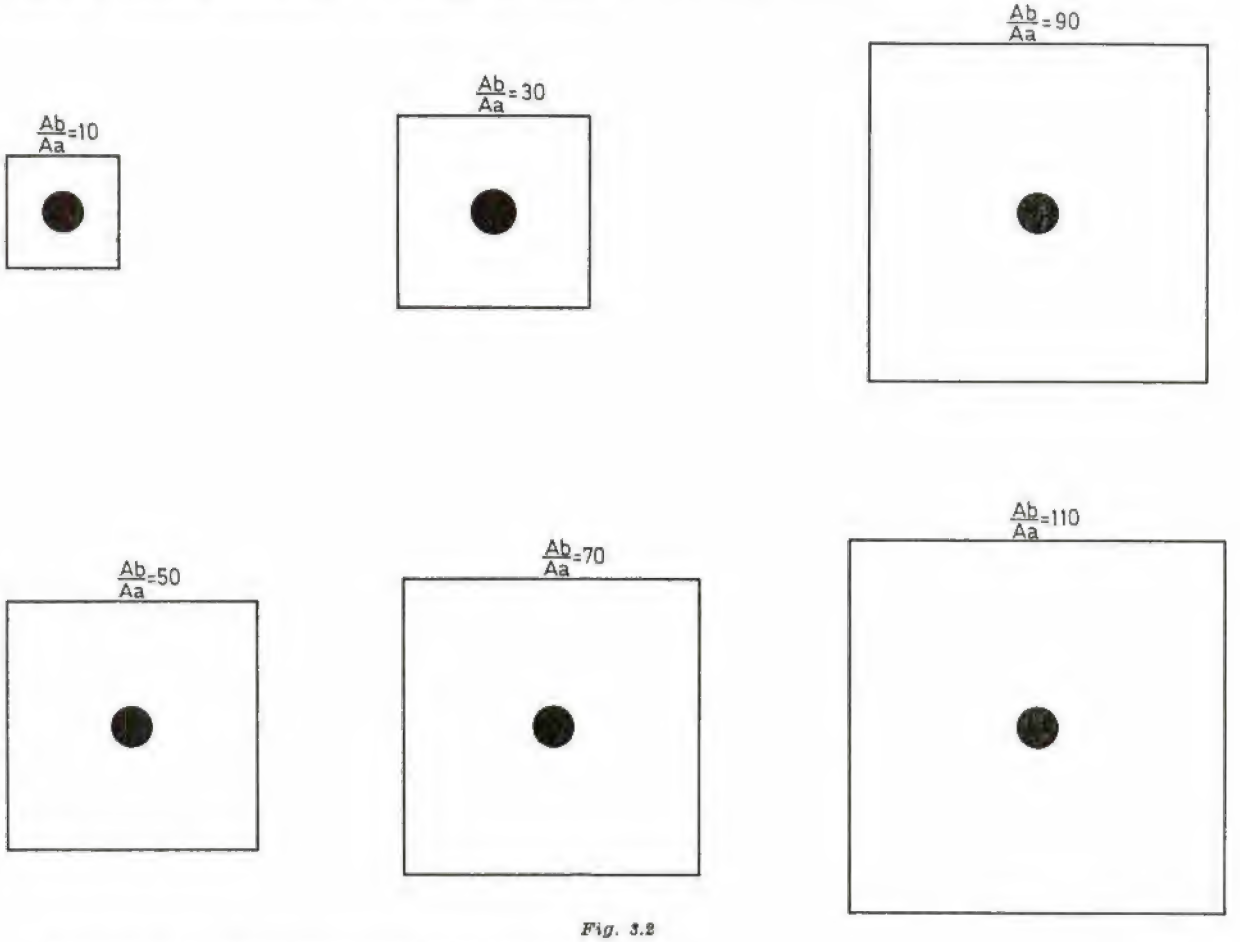


Fig. 3.2

Relações de 30, 40, 70 ou mesmo 80 devem corresponder a situações de colaboração recíproca e regular entre betão e armadura.

Para clarificação, consideram-se, delimitadas, na fig. 3.1, por linhas verticais, as seguintes zonas:

1 — A_b/A_a menor que 10 que se designou, para sistematização, por «elemento metálico revestido a betão»;

2 — A_b/A_a entre 10 e 100 — «betão armado, armado/pré-esforçado e pré-esforçado corrente»;

3 — A_b/A_a maior que 110 — «betão simples com armadura».

Horizontalmente, consideram-se duas grandes zonas:

1) — Para σ_a maior que zero (tracções) — «zona de fissuração provável»;

2) — Para σ_a menor que zero (compressões) — «zona de não fissuração».

No capítulo que se segue referente à fissuração serão estabelecidos critérios de subdivisão da zona 1) de «fissuração provável».

Assim, e adiantando, estabelecem-se as seguintes zonas:

1.1) — Zona de «Muita pequena probabilidade de fissuração ($\sigma_a < 500$ kgf/cm²);
1.2) — Zona de «Pequena probabilidade de fissuração»;
1.3) — Zona de «Fissuração provável mas aceitável»;
1.4) — Zona de «Fissuração inaceitável».

3.2 — Armaduras correspondentes

Por ser de uso corrente, dado o seu valor caracterizante, apresentam-se seguidamente as quantidades de aço em kg . m^{-3} de betão, correspondentes a alguns valores da relação Ab/Aa.

QUANTIDADES DE AÇO EM kg POR m³ DE BETÃO

A_b/A_a	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
kg . m^{-3}	780	390	260	195	156	130	111	98	87	78	71

QUADRO 3.1

Como se referiu, A_b corresponde ao betão envolvendo directamente a armadura pelo que os valores do quadro 3.1 traduzem satisfatoriamente a quantidade de armadura em estruturas em que o aço se distribue uniformemente na massa de betão. Os valores encaixilhados correspondem aos casos mais correntes neste tipo de estruturas.

Em secções rectangulares à flexão a área total de betão é da ordem de 4 vezes A_b mas haverá a considerar também estribos e armaduras de montagem.

4 — ESTUDO DA FISSURAÇÃO

4.1 — Estabelecimento de expressões gerais

As secções de betão armado, pré-esforçado ou armado/pré-esforçado devem ser dimensionados de modo que na zona de utilização — até ao «estado limite de utilização» — se não ultrapasse a fissuração previamente considerada como admissível.

Os documentos normativos conhecidos limitam-se a estabelecer expressões que permitem obter a abertura de fenda que, com segurança, não será atingida. A comparação do valor assim determinado com a abertura máxima normativamente estabelecida permite verificar se a secção é ou não satisfatória.

Neste capítulo tenta estabelecer-se metodologia no sentido de se acompanhar o fenómeno a par e passo de modo a prever a fenda esperada que multiplicada por coeficiente de segurança conveniente, fornece uma abertura de fenda com segurança média pré-fixada.

Na fig. 4.1 representa-se uma peça de betão armado submetida à tracção pura.

— É possível estabelecer a seguinte relação:

$$A_a \cdot \sigma_a = \sigma_{ai} \cdot A_a + \sigma_b \cdot A_b \qquad (4.1)$$

Na situação de abertura incipiente de outra fenda, na secção O, será:

$$\sigma_{ai} = \epsilon_{br} \times E_a \qquad (4.2)$$

e

$$\sigma_b = \sigma_{br} \qquad (4.3)$$

com

ϵ_{br} — a extensão de rotura disponível no betão;
σ_{br} — a tensão de rotura no betão;
E_a — módulo de elasticidade do aço.

Assim, será:

$$\sigma_a = \epsilon_{br} \cdot E_a + \sigma_{br} \frac{A_b}{A_a} \qquad (4.4)$$

A extensão de rotura do betão depende das suas características e varia entre 60×10^{-5} e 20×10^{-5}.

Atendendo a efeitos de retracção e outros o valor residual disponível deve ser tomado por segurança da ordem de 20×10^{-5}.

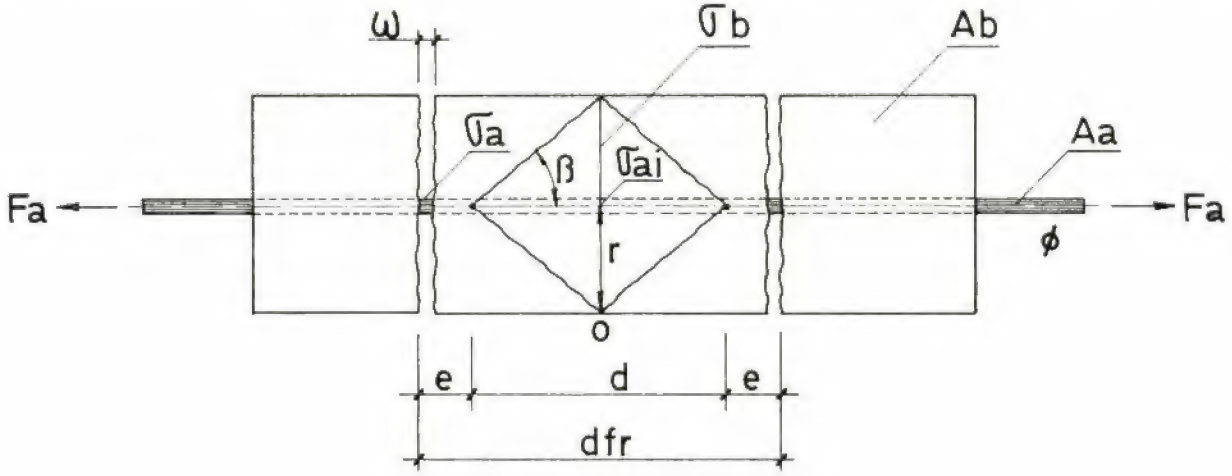


Fig. 4.1

Nesta figura:

A_a — é a secção da armadura;
A_b — é a secção de betão envolvente correspondente;
ϕ — o diâmetro da armadura;
F_a — a força de tracção actuando a armadura na zona de uma fenda;
σ_a — a tensão estabelecida na armadura na zona de uma fenda;
ω — abertura da fenda;
dfr — afastamento entre fendas (valor de referência);
σ_b — tensão no betão numa secção entre fendas;
σ_{ai} — tensão na armadura na secção correspondente a σ_b.

De forma semelhante σ_{br} varia com as características do betão.

Um valor da ordem de 20 kgf. cm^{-2} traduz de modo satisfatório o seu comportamento médio na fissuracção.

Obtém-se, assim, a relação:

$$\sigma_a = 400 + 20 \frac{A_b}{A_a} \text{ kgf. cm}^{-2} \qquad (4.5)$$

Para valores de σ_a inferiores aos dados pelo segundo membro de (4.5) haverá «pequena probabilidade de fissuração».

Esta equação encontra-se representada na fig. 3.1, limitada pela recta BC correspondente a $\sigma_a = 1600$ kgf. cm-2.

Na mesma figura representa-se também a expressão regulamentar:

$$(\sigma_a - 30 \frac{A_b}{A_a}), \text{ R.E.B.A., Artigo 39.º}$$

* * *

A abertura das fendas ω deverá ser a diferença entre a deformação da armadura Δ_a e a deformação do betão Δ_b no intervalo d_{fr}. Ou, aproximadamente, a diferença entre a extensão média no aço ε_{am} e a extensão média no betão ε_{bm} multiplicada pela distância d_{fr}.

Assim:

$$\omega = \Delta_a - \Delta_b = (\varepsilon_{am} - \varepsilon_{bm})\ d_{fr} \qquad (4.6)$$

No que se vai seguir admite-se que as secções são armadas com aços canelados ou rugosos garantindo a ligação entre o aço e o betão.

Sucede (Fig. 4.1) que a seguir a uma fenda se estabelece uma zona de transição de comprimento e necessária para criar nova amarração entre o aço e o betão.

A partir desta zona vão-se mobilizando para o processo áreas de betão que se consideram circunscritas por cones de abertura β.

Quando estes cones se interpenetram existe propensão à abertura de uma fenda.

Será: $$d_{fr} = 2\ (d + e) \qquad (4.7)$$

Em domínio aberto (betão armado) β será sensivelmente igual a 45°; em secções sujeitas a compressão (caso de betão armado pré-esforçado ou pré-esforçado) vai reduzir-se a zona traccionada, pois a linha neutra estabelece-se normalmente para valores maiores que 0,6 h, cria-se assim como que um «ecran reflector» fechando a abertura do cone para β da ordem de 30°.

Sendo r o raio da base do cone de dispersão é possível estabelecer-se

$$A_b = 4\ r^2 \qquad (4.8)$$

ou $$r = 0{,}5\ \sqrt{A_b} \qquad (4.9)$$

e para $\beta = 45°$, $d = r$ donde:

$$d_{fr} = \sqrt{A_b} + 2\ .\ e \qquad (4.10)$$

ou ainda

$$d_{fr} = \sqrt{\frac{A_b}{A_a} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \phi^2} + 2\ .\ e =$$

$$= 0{,}89 \sqrt{\frac{A_b}{A_a}} \cdot \phi + 2\ e \qquad (4.11)$$

O comprimento de amarração e, é dado nos casos correntes, por valores da ordem de:

$$e = 0{,}21 \sqrt{\frac{A_b}{A_a}} \cdot \phi \qquad (4.12)$$

Considerando um coeficiente de segurança de 1,05, obtém-se finalmente:

$$\boxed{d_{fr} = 1{,}2 \sqrt{\frac{A_b}{A_a}} \cdot \phi} \qquad (4.13)$$

No caso de secções submetidas a compressão devido à redução do valor de β o afastamento entre fendas será cerca de 1,3 vezes o valor dado por (4.13).

A equação (4.13) pode escrever-se ainda, sob a forma:

$$d_{fr} = 1{,}4\ \sqrt{A_b} \qquad (4.14)$$

E para, $\frac{A_b}{A_a} = 70$ (maior relação considerada para um comportamento definido do material)

$$\boxed{d_{fr} \leqslant 10\ .\ \phi} \qquad (4.15)$$

* * *

A equação (4.1), para $\sigma_b = 20$ kgf. cm-2, pode escrever-se:

$$\sigma_{ai} = \sigma_a - 20\ \frac{A_b}{A_a} \qquad (4.16)$$

A extensão no aço, será então, da ordem de:

$$\Delta_a = \frac{\sigma_a + \sigma_{ai}}{2} \times \frac{d_{fr}}{E_a} \qquad (4.17)$$

E, a extensão média no betão, da ordem de:

$$\Delta_b = 0{,}8\ \frac{20 \times 10^{-5}}{2} \times d_{fr} = 160\ \frac{d_{fr}}{E_a} \qquad (4.18)$$

O coeficiente 0,8 traduz o facto de a extensão no betão não ser uniforme ao longo de d.

A abertura de referência das fendas será, assim, dado por:

$$\omega_r \simeq (\Delta_a - \Delta_b) = \frac{d_{fr}}{E_a} (\frac{\sigma_a}{2} + \frac{\sigma_a}{2} - 10 \frac{A_b}{A_a} - 160) \qquad (4.19)$$

ou

$$\omega_r \simeq 0{,}48\ (\sigma_a - 10\frac{A_b}{A_a} - 160) \times d_{fr} \times 10^{-5}\ \text{mm} \qquad (4.20)$$

Este valor dá a abertura da fenda ao nível da armadura.

Para o caso de vigas, dada a abertura da fenda em forma de V invertido, para obter a fenda junto ao bordo estabelece-se um coeficiente $k_c > 1$, dado por:

$$k_c = 0{,}9 + 2{,}2\ \frac{c}{h} \qquad (4.21)$$

com

c — recobrimento da armadura
h — altura útil da viga

Obtém-se, assim a expressão genérica seguinte:

$$\omega_r = 0{,}48\ (\sigma_a - 10\frac{A_b}{A_a} - 160) \times k_c \times d_{fr} \times 10^{-5}\ \text{mm} \qquad (4.22)$$

O termo redutivo $(10\ \frac{A_b}{A_a} + 160)$ representa a contribuição do betão e deve ser limitado a valores da ordem de 600.

Tomando o valor de 500 e considerando $k_c = 1$ pode escrever-se finalmente:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \omega_r \simeq (0{,}48\ \sigma_a - 240)\ .\ d_{fr} \times 10^{-5}\ \text{mm} & (4.23) \\ \sigma_a - \text{kgf. cm}^{-2}\ ;\ d_{fr} - \text{cm} & \\ \text{com} \quad d_{fr} = 1{,}2\ \sqrt{\frac{A_b}{A_a}}\ .\ \phi\ \ (\text{cm}) & (4.24) \\ \phi - \text{cm} & \end{array}}$$

* * *

A expressão $10\ \frac{A_b}{A_a} + 160$, limitada ao valor de 500, encontra-se representado na fig. 3.1.

Abaixo desta linha quebrada (E a D) estabelece-se assim a zona que se designou de «Muito pequena probabilidade de fissuração»; entre esta linha e a linha

$$400 + 20\ \frac{A_b}{A_a}$$

estabelece-se a zona que se designou de «Pequena probabilidade de fissuração» e que na figura aparece sombreada mais escura.

Acima desta última linha estabelece-se a zona que se designou de «Fissuração provável mas aceitável» até linhas definidas por σ_a suficientemente grandes. Para além de certos valores de σ_a a fissuração esperada excede a abertura da fissuração aceitável e estabelece-se a zona que se designou de «Fissuração inaceitável».

É interessante verificar que a zona de utilização recomendada pelos autores clássicos para estruturas onde se pretende apreciável segurança à fissuração, (caso por exemplo de depósitos) se encontra localizada no núcleo central da zona de «Pequena probabilidade de fissuração». É a zona de (M) da fig. 3.1 e, isto, independentemente do betão estar submetido a tracções que podem atingir 70 kgf/cm² ou mais.

Por questões de segurança, sobretudo em elementos sujeitos a solicitações de carácter dinâmico despreza-se a contribuição do betão na expressão (4.23), obtendo-se:

$$\boxed{\omega_r = 0{,}48\ \sigma_a\ .\ d_{fr} \times 10^{-5}\ \text{mm}} \qquad (4.25)$$

* * *

Admitindo $d_{fr} = 10$ cm, considerando um coeficiente de segurança da ordem de 2,1 e reduzindo o termo subtrativo 240 a 80% do seu valor, obtém-se:

de (4.23); $\omega_{max} = (\sigma_a - 400) \times 10^{-4}$ mm (4.26)
e, de (4.25); $\omega_{max} = \sigma_a \times 10^{-4}$ mm (4.27)

Nestas expressões σ_a é a tensão na armadura na fenda (Fase II), em kgf. cm⁻².

As expressões (4.26) e (4.27) correspondem exactamente às relações preconizadas pelo C. E. B. para as verificações em Classe III.

No entanto, nestes casos, os valores d_{fr} são normalmente maiores que 10 cm.

* * *

As relações (4.23) e (4.24) podem considerar-se correctas e fornecerão valores aceitáveis. Simplesmente, a determinação de A_b (área de betão mobilizado) exige análise específica caso por caso.

É o que se fará nos capítulos seguintes em relação a «vigas» e a «tirantes».

Nas expressões indicadas σ_a é a tensão na armadura na fenda. No caso de peças submetidas a tracção pura (tirantes, depósitos, etc.) σ_a é facilmente determinável pois será dada pelo quociente entre a força de tracção F_a e a secção da armadura A_a. No caso de vigas é determinável, com boa aproximação, considerando a «Fase II».

Haverá uma analogia processual entre a fissuração e um circuito eléctrico em série — *rompe no ponto mais fraco* — o qual se impõe determinar em cada caso.

4.2 — Aplicação a vigas

Considera-se a secção rectangular na zona traccionada e as armaduras dispostas numa ou duas camadas, embora sejam facilmente extrapoláveis os critérios expostos a outras situações.

Vai fazer-se a aplicação das expressões

$$\omega_r = (0{,}48\ \sigma_a - 240)\ .\ d_{fr} \times 10^{-5}\ (\text{mm})$$

com $$d_{fr} = 1.2 \sqrt{\frac{A_b}{A_a} \cdot \phi} \quad (cm)$$

Nos casos de grande recobrimento haverá que multiplicar o valor de ω_r obtido, por k_c dado por (4.21).

Os valores de $\frac{A_b}{A_a}$ serão derivados ou da zona de influência da armadura ou da zona traccionada da secção. O valor mais provável é o menor.

Estudam-se sucessivamente os dois casos.

4.2.1 — Zona de influência das armaduras

a) 1.º limite (livre em altura e largura)

a.1 — armaduras numa só camada

Admitindo que o raio de acção duma armadura é de 3ϕ, obtém-se que a dimensão mobilizável será da ordem de 7ϕ $(3\phi + \phi + 3\phi)$, donde:

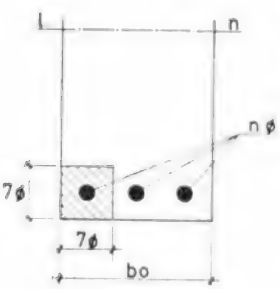


Fig. 4.2

$$\frac{A_b}{A_a} = \frac{7\phi \times 7\phi}{\frac{\pi}{4} \times \phi^2} = \sim 64$$

$$d_{fr} = 1.2 \sqrt{\frac{A_b}{A_a} \cdot \phi} = 10 \cdot \phi$$

$$d_{fr} \leqslant 10 \cdot \phi \qquad (4.28)$$

a.2 — armaduras em duas camadas

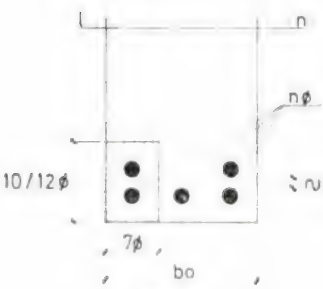


Fig. 4.3

$$\frac{A_b}{A_a} = \frac{10\phi \times 7\phi}{2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \phi^2} = \sim 45$$

$$d_{fr} \leqslant 8 \cdot \phi \qquad (4.29)$$

b) — 2.º limite (livre em altura/condicionado em largura)

b.1 — armadura numa só camada

$$\frac{A_b}{A_a} = 7\phi \left(\frac{b_o}{n} - \frac{\phi}{4}\right) \frac{1}{\frac{\pi}{4} \cdot \phi^2} \simeq 9 \left(\frac{b_o}{n} - \frac{\phi}{4}\right) \cdot \frac{1}{\phi}$$

$$d_{fr} = 1,2 \sqrt{9 \left(\frac{b_o}{n} - \frac{\phi}{4}\right) \phi}$$

ou $$d_{fr} = \sqrt{z \left(\frac{b_o}{n} - \frac{\phi}{4}\right)} \qquad (4.30)$$

com $$z = 13 \cdot \phi \qquad (4.31)$$

b.2 — armadura em duas camadas

$$\frac{A_b}{A_a} = 10\phi \left(\frac{b_o}{n} - \frac{\phi}{4}\right) \times \frac{4}{2 \cdot \pi \cdot \phi^2} = 6 \left(\frac{b_o}{n} - \frac{\phi}{4}\right) \cdot \frac{1}{\phi}$$

$$d_{fr} = \sqrt{9 \cdot \phi \left(\frac{b_o}{n} - \frac{\phi}{4}\right)}$$

$$d_{fr} = \sqrt{z \left(\frac{b_o}{n} - \frac{\phi}{4}\right)} \qquad (4.32)$$

$$z = 9 \cdot \phi \qquad (4.33)$$

4.2.2 — Zona de influência derivada da posição da «linha neutra» em «Fase I»

Em «Fase I», em betão armado e em flexão pura, a linha neutra estará sensivelmente a meia altura da secção.

Considerando $d = 0.5 \times 0,5\ h_t$, será $d = 0,25\ h_t$ ou, sensivelmente:

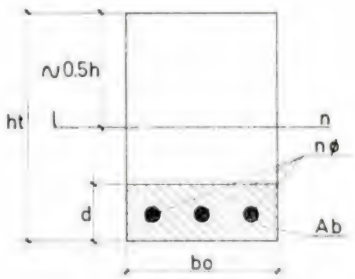


Fig. 4.4

$$d = 0.27\ h$$

$$\frac{A_b}{A_a} = \frac{0.27\ h \left(\frac{b_o}{n} - \frac{\phi}{4}\right)}{\frac{\pi}{4} \cdot \phi^2}$$

$$d_{fr} = 1,2 \sqrt{0,344\ h \left(\frac{b_o}{n} - \frac{\phi}{4}\right)} =$$

$$= \sqrt{0,5\ h \left(\frac{b_o}{n} - \frac{\phi}{4}\right)}$$

ou

$$d_{fr} = \sqrt{z \left(\frac{b_o}{n} - \frac{\phi}{4}\right)} \qquad (4.34)$$

com

$$z = 0,5\ h \qquad (4.35)$$

Em resumo podem escrever-se, com aproximação, as seguintes relações:

$$d_{fr} = \theta \sqrt{\frac{b_0}{n} - \frac{\phi}{4}} \qquad (4.36)$$

com

$$\theta = \sqrt{13 . \phi} \qquad (4.37)$$

ou

$$\theta = \sqrt{0{,}5 . h} \qquad (4.38)$$

Será escolhido o menor valor de $\underline{\theta}$ dado por (4.37) ou (4.38).

O valor de d_{fr} assim obtido deverá ser comparado com 10 ϕ (4.28) ou 8 ϕ (4.29) e escolhido o menor de acordo com o caso em apreço.

As relações (4.36), (4.37) e (4.38) são tradutíveis graficamente (fig. 4.5) permitindo a fácil determinação da fenda de referência (ω_r) esperada.

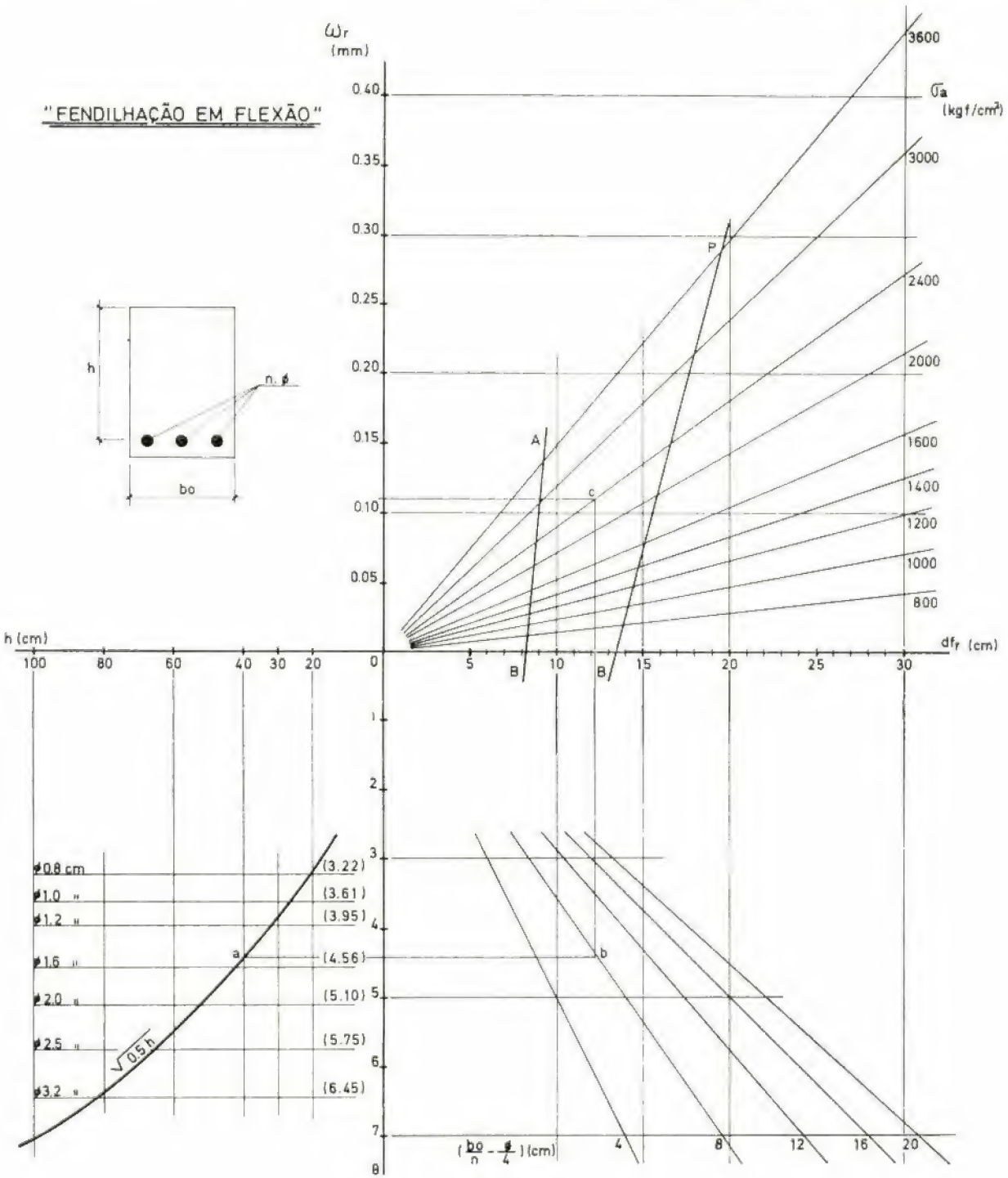


Fig. 4.5

A figura referida permite a análise global dos factores essenciais relacionados com a fissuração.

De referir, que para tensões σ_a da ordem de 1 400 kgf. cm-2 a fissuração será reduzida e não merecendo, em geral, cuidados especiais. Para σ_a da ordem de 800 a 1000 kgf . cm-2 o betão deve apresentar fissuração extremamente reduzida, mesmo mal armado. Tensões desta ordem, acompanhadas duma judiciosa distribuição de armadura, conduzirão a fissuração nula ou muito reduzida.

* * *

A utilização da figura faz-se como segue.

Procura-se o valor da altura útil da secção h, desce-se na vertical até encontrar ou a linha representativa do diâmetro da armadura ou a curva $\sqrt{0{,}5\,h}$.

Encontrada a que corresponde ao menor valor de Θ, segue-se na horizontal até encontrar a linha correspondente a $\left(\frac{b_0}{n} - \frac{\phi}{4}\right)$; sobe-se na vertical, lê-se o valor de d_{fr} e, no cruzamento com a linha correspondente a σ_a, segue-se horizontalmente obtendo-se ω_r.

* * *

— Como exemplo, seja determinar ω_r e d_{fr} numa secção de $b_0 = 25$ cm h, = 40 cm, armada com 3 ϕ de 20 mm dimensionado para $\sigma_a = 2400$ kgf. cm-2.

Será $\left(\frac{b_0}{n} - \frac{\phi}{4}\right) = \frac{25}{3} - \frac{2{,}0}{4} = 7{,}8$ cm; seguindo-se a linha 40/a/b/c lê-se $d_{fr} = 12{,}2$ cm e $\omega_r = 0{,}11$ mm.

* * *

Em vigas altas, a fissuração junto à face, comandada pelas armaduras, pode ser apreciavelmente diferente da fissuração na alma (se esta não dispuzer de armadura) comandada pela curva $\sqrt{0{,}5\,h}$ e pela recta b_0 em vez da recta $\left(\frac{b_0}{n} - \frac{\phi}{4}\right)$, daqui resultando o fenómeno da «arborização». — Na alma, fendas largas, muito afastadas, ramificam-se para entroncarem com fendas pouco espaçadas e pouco abertas na zona armada.

A fendilhação da alma está dependente da altura da zona traccionada da alma, compreendida entre a zona de influência das armaduras e a linha em que se estabelecem tensões de tracção no betão iguais às de rotura; zona $[f_a]$.

Esta zona deve portanto ser armada.

No que se refere a flexão pura, os Art. 66.º e Art. 68.º do R. E. B. A. contemplam tal assunto.

Sugere-se, no entanto, a seguinte expressão de aplicação genérica:

$$\boxed{Aa = 0{,}025.\ b_0 h.\left[0{,}12\left(1 - \alpha\right) - n\,\frac{\phi}{h}\right] \text{cm}^2} \qquad (4.39)$$

b_0 — largura da alma (cm);
h — altura útil da secção (cm);
α — linha neutra;
n — n.º de camadas da armadura principal;
ϕ — diâmetro da armadura principal;
A_a — armadura a utilizar em cada face da alma na zona $[f_a]$. Nos cálculos de determinação dos esforços resistentes esta armadura pode, naturalmente, ser considerada.

* * *

Em betão armado normal à flexão pura a fenda de referência corresponde ao que chamaremos fenda média (ω_{med}) ou normal.

Determinada a fenda de referência vejamos outras possíveis ocorrências.

— Em certas circunstâncias a zona de influência das armaduras ou derivada da posição da linha neutra cresce até ao dobro, donde d_f e, consequentemente, ω será da ordem de 1,4 d_{fr} e 1,4 ω_r respectivamente ($1{,}4 = \sqrt{2}$). Designaremos esta situação de «ocasional»;
— Quando uma fenda não abre, ou a sua abertura se atrasa, as fendas colaterais abrem de modo a compensar a sua não abertura;
— Se a fenda que não abriu corresponde a uma situação «ocasional» ter-se-á uma fenda «excepcional». A fenda excepcional será portanto da ordem de grandeza de 1,0 + 0,7 = 1,7 vezes a fenda normal;
— Multiplicando esta abertura por um coeficiente de segurança da ordem de 1,15 obtém-se a abertura da fenda máxima que será, portanto, da ordem de 2,0 vezes a fenda média ou normal.

No caso de secções submetidas a compressão o afastamento entre fendas é, como se referiu, da ordem de 1,3 vezes maior que em secções sujeitas a flexão pura, mas por outro lado a altura traccionada é normalmente menor.

Por raciocínios semelhantes aos anteriores pode-se relacionar a fenda «ocasional» e «excepcional» com a fenda de «referência», atrás definida e determinável pela fig. 4.5 e bem assim as respectivas «fendas de cálculo».

Pode estabelecer-se o seguinte quadro de coeficiente por que se deve multiplicar a fenda de referência para obter as restantes.

VALORES DE «k»

	Fenda «normal» ou média	Fenda «ocasional»	Fenda «excepcional»
Flexão pura	1,0	1,4	1,7
Flexão com compressão	1,2	1,5	1,7

QUADRO 4.1

Para se obterem as aberturas das fendas de cálculo haverá que multiplicar os coeficientes «k», indicados no Quadro 4.1 por coeficientes de majoração γ_s da ordem de 1,10 a 1,15.

A fenda de cálculo será assim dada por:

$$\boxed{\omega^* = \omega_r \times k \times \gamma_s} \qquad (4.40)$$

Em conclusão, é possível analiticamente (Eq. 4.23 e 4.24) ou pela fig. 4.5 determinar a fenda de referência que multiplicada pelos coeficientes do Quadro 4.1 permite obter a situação que se pretende.

* * *

— Normalmente, pretende-se apenas obter a fenda de cálculo correspondente à fenda excepcional ou seja a fenda máxima:

$$\omega_{max} = \omega_r \times 1{,}7 \times 1{,}15 = 2{,}0\ \omega_r$$

$$\boxed{\omega_{max} = 2{,}0 \times \omega_r} \qquad (4.41)$$

Esta fenda será comparada com a fenda admissível regulamentar.

Em certos casos bastará apenas garantir a segurança em relação à fenda normal ou à fenda ocasional. Nestes casos os coeficientes k do Quadro 4.1 correspondentes à situação que se pretende garantir deverão ser multiplicados por coeficientes de segurança γ_s, conforme eq. (4.40).

* * *

Na figura 4.5 marcaram-se ainda duas linhas referenciadas por B.A e B.P entre as quais se encontram as situações mais frequentes.

Utilizando os critérios expostos para uma viga corrente, armada com diâmetros de 16 mm, obtiveram-se as fendas máximas (ω_{max}) que se apresentam na fig. 3.1 e que permitem mais uma visualização do problema.

Para elementos que caiam na zona escurecida da fig. 3.1 (A, B, C, D, E) é de esperar que a abertura máxima das fendas não exceda 0,1 mm. A zona M será porventura a mais segura por se encontrar relativamente afastada de qualquer fronteira da zona.

Note-se que a área A_b de betão corresponde tão somente ao betão envolvente da armadura como já se referiu. Em relação à área total dum elemento, a % de armadura corresponde como ordem de grandeza, a cerca de ¼ desta, ou seja 10 % : 4 = 2,5 % e 1,4 % : 4 = 0,39 %, respectivamente, como valores máximos e mínimos da «zona de comportamento definido».

Os valores regulamentares de 0,20 % e 0,15 % são porventura um tanto baixos pois virão corresponder a situações representadas por

$$\frac{A_b}{A_a} > 110 \qquad \text{na fig. 3.2}$$

* * *

Por vezes importa resolver o problema inverso. Isto é, saber qual a tensão a utilizar no aço (σ_a) de modo que a abertura seja inferior à previamente estabelecida.

Fixando por exemplo d_{fr} = 10 cm e entrando na expressão (4.23) obtém-se, sensivelmente:

$$\sigma_a \leqslant 500 + 20\,000\ \omega_r \qquad (4.42)$$

Esta expressão pode utilizar-se em casos normais. Nas situações em que as solicitações dinâmicas sejam frequentes deve reduzir-se a contribuição do betão e utilizar-se expressões do tipo:

$$\sigma_a \leqslant 200 + 20\,000\ \omega_r \qquad (4.43)$$

ou mesmo

$$\sigma_a \leqslant 20\,000\ \omega_r \qquad (4.44)$$

que coincide com a expressão do C. E. B.

Note-se no entanto que se considera a expressão (4.42) segura dado que as solicitações dinâmicas, embora acelerando o processo de estabilização da abertura de fissuras, não actuam apreciavelmente no aumento da abertura das fissuras nem no seu espaçamento.

A actuação sensível que as solicitações dinâmicas poderão ter é no aumento do termo e fig. 4.1, reduzindo d mas aumentando o coeficiente 0,8 da expressão 4.18.

O valor de ω_r será fixado utilizando os critérios já expressos recorrendo aos valores de k do quadro 4.1 majorados de γ_s.

* * *

Assim, por exemplo, organizando a secção de modo que d_{fr} seja da ordem de 10 cm e limitando a fenda máxima a 0,2 mm; obtém-se ω_r = 0,20:2 = 0,10 mm e σ_a = 2500 kgf. cm^{-2}.

Para ω_{max} = 0,10 mm, será neste caso, ω_r = 0,05 mm e σ_a = 1500 kgf. cm^{-2}.

Se em vez de (4.42) se utilizasse (4.44), obtinha-se respectivamente: — σ_a = 2 000 kgf.cm^{-2} e σ_a = 1 000 kgf. cm^{-2}.

4.3 — Aplicação a casos de tracção pura

As expressões (4.23) e (4.24) são aplicáveis directamente ao caso de peças submetidas a tracção pura, como tirantes, depósitos, etc.

A sua tradução gráfica encontra-se na fig. 4.6 na qual a zona escorecida corresponde à zona de utilização corrente. Acima e para a esquerda da linha AB não é possível respeitar as regras construtivas relativas ao espaçamento dos varões, que devem ser respeitadas.

Para relações de A_b/A_a da ordem de 25 a 30 e tensões σ_a entre 800 e 1000 kgf. cm^{-2} a fenda média esperada mesmo para secções armadas com ϕ 25 não excederá 0,04 mm. E, para tensões de 1400 kgf. cm^{-2} 0,06 mm.

Note-se que, em tracção pura, o funcionamento será melhor definido que em flexão e para obter a fenda máxima bastará porventura multiplicar a fenda média ou de referência por coeficiente «k» da ordem de 1,3 o que conduz a uma fenda máxima ($\omega_{max} = 1{,}15 \times 1{,}3\ \omega_{med}$) da ordem de:

$$\boxed{\omega_{max} = 1{,}5\ \omega_{med}} \qquad (4.45)$$

* * *

Exemplo: — Seja calcular um tirante constituído por 3 camadas de 2 diâmetros de 20 mm, distanciados entre si de 6 cm; o recobrimento é de 3 cm.

$$A_b = (3 + 2 + 6 + 2 + 3)\ (3 + 2 + 6 + 2 + 6 + 2 + 3) = 16 \times 24 = 384\ cm^2$$

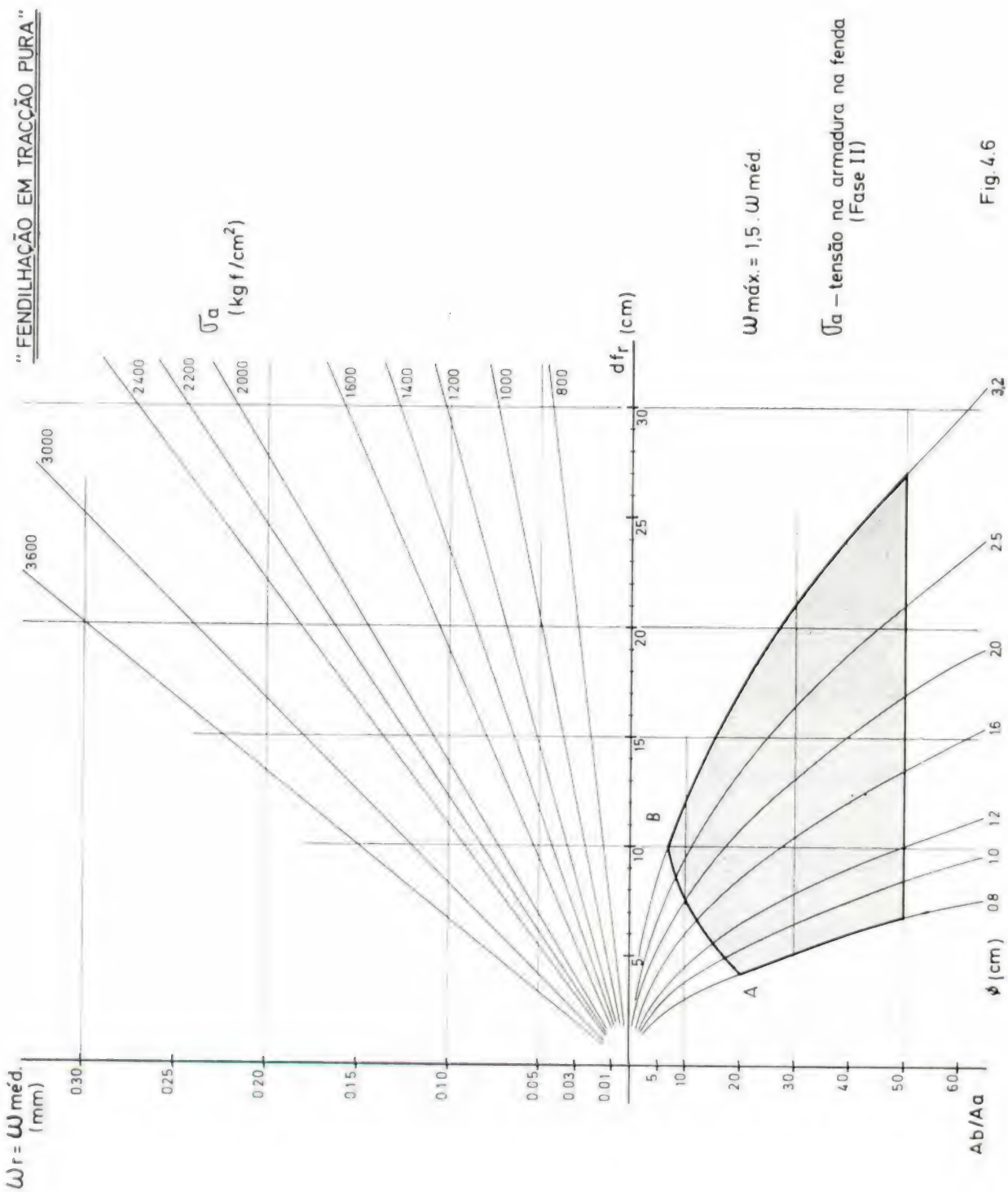
$$A_a = 6 \times 3{,}14 = 15{,}5\ cm^2$$

$$A_b/A_a = 20$$

Para $\sigma_a = 1400$ kgf. cm^{-2} obtém-se: — dfr = 11 cm; $\omega_{med} = 0{,}06$ mm será $F_t = 26{,}3$ tf e $\omega_{max} \simeq 0{,}09$ mm.

Para $\sigma_a = 2400$ kgf. cm^{-2} seria dfr = 11 cm e $\omega_{med} = 0{,}10$ mm, $F_t = 45{,}1$ tf e $\omega_{max} \simeq 0{,}15$ mm.

Fig. 4.6



Transmissão de dados e informações com a técnica electrónica Brown Boveri

Os nossos equipamentos de transmissão por feixes hertzianos, exclusivamente equipados com semi-condutores, garantem uma alta segurança na transmissão de sinais de dados, palavra e música.

BBC
BROWN BOVERI

Sociedade de Electricidade Brown Boveri, Lda.
Rua de Sá da Bandeira, 481 — 2º Dto. — PORTO

8ª EDIÇÃO REVISTA E ACTUALIZADA

A SAÍR BREVEMENTE

C. D. U. 621.374.33

Algoritmo para obter uma máquina sequencial finita especificada por expressões regulares [*]

L. T. MAGALHÃES
M. P. O. RICOU

RESUMO

Neste artigo são apresentados e demonstrados algoritmos para máquinas de Mealy e de Moore com qualquer número de terminais de saída e qualquer número de símbolos em cada terminal. Os algoritmos utilizam a igualdade de expressões regulares ou a semelhança de expressões regulares.

ABSTRACT

In this paper we state and prove algorithms for Mealy and Moore machines with any number of output terminals and any number of output symbols at each of the output terminals. The algorithms use equality or similarity of regular expressions.

1. Introdução

Em muitos textos só são descritos algoritmos deste tipo para máquinas com um só terminal de saída onde podem ocorrer apenas dois símbolos de saída. Além disso, é frequente que os algoritmos sejam apresentados de uma forma descritiva e só parcialmente demonstrados.

Neste artigo apresentamos de forma esquemática e demonstramos algoritmos para o caso geral de qualquer número de terminais de saída com qualquer número de símbolos de saída. São descritos dois algoritmos para cada tipo de máquina (Mealy ou Moore). Um dos algoritmos usa a igualdade de expressões regulares. Nem sempre é fácil determinar quando duas expressões regulares são iguais, se bem que já tenham sido desenvolvidos algoritmos com essa finalidade [2]. Para evitar este inconveniente o outro algoritmo utiliza a semelhança de expressões regulares, que é uma relação menos restritiva, cuja validade é de mais simples verificação.

Adoptaremos as definições e convenções de Booth [1] — pgs. 214 a 240.

2. Descrição do comportamento entrada/saída por expressões regulares

Considere-se que uma máquina completamente especificada tem $t \geq 1$ terminais de saída e que em cada terminal podem ocorrer $p \geq 2$ símbolos. Designe-se por $z_{u,i}$ $(i=0, 1, \ldots, p-1)$ os diferentes símbolos que podem ocorrer no terminal de saída $\underline{u}$ $(u=1, 2, \ldots, t)$. Consideramos assim que o conjunto das saídas da máquina é

$$Z=\{(z_{1,a_1}, z_{2,a_2}, \ldots, z_{p,a_p}) : a_i \in \{0, \ldots, p-1\}, \; i=1, \ldots, t\}$$

Este conjunto tem $r=p^t$ elementos.

Suponhamos que ${}_uM_{I,i}$ $(u=1, \ldots, t;\; i=0, \ldots, p-1)$ é uma expressão regular que descreve o conjunto das sucessões de entrada que produzem o símbolo de saída $\underline{u}$, a partir do estado inicial q_I.

Note-se que para uma máquina com o comportamento entrada/saída assim especificado ser realizável, não podem ser produzidas duas saídas diferentes em cada terminal, a partir da mesma sucessão de entrada, i.e., que

$$\forall_{\substack{u=1,\ldots,t \\ i,k=0,\ldots,p-1 \\ i \neq k}} \; {}_uM_{I,i} \wedge {}_uM_{I,k} = \emptyset$$

Nas condições atrás expostas considera-se o vector regular com $tx.(p-1)$ componentes

(*) Este trabalho foi realizado em 1973/74 enquanto alunos da disciplina Sistemas Digitais — IST, Lisboa e bolseiros no IGC, Oeiras.

$$\overline{M} = ({}_1M_{I,1}, \ldots, {}_1M_{I,p-1}, \ldots, {}_tM_{I,1}, \ldots, {}_tM_{I,p-1})$$

Este vector define o comportamento entrada/saída da máquina quando o estado inicial for q_I. Note-se que neste vector não figuram as expressões regulares que definem as sucessões de entrada que conduzem à saída $z_{u,0}$ no terminal $\underline{u}$. De facto basta considerar as expressões regulares que definem as sucessões de entrada que conduzem a todas as outras saídas na linha $\underline{u}$, pois

$$\widetilde{{}_uM_{i,0}} = \bigvee_{i=1}^{i-1} {}_uM_{i,i}$$

i.e., sempre que uma sucessão de entrada não conduz à saída de um dos símbolos $z_{u,i}$ $(i = 1, \ldots, p-1)$ no terminal $\underline{u}$, o símbolo de saída será necessariamente $z_{u,0}$, visto que a máquina se supõe completamente especificada.

3. Máquina com estado inicial q_I

Uma máquina de Mealy (ou de Moore) com estado inicial q_I é um sextuplo ordenado $S = (I, Q, Z, \delta, \omega, q_I)$, onde $S' = (I, Q, Z, \delta, \omega)$ é uma máquina de Mealy (ou de Moore) [1] — pgs 69-70, e onde $q_I \in Q$.

4. Algoritmos para máquinas de Mealy

Pretende-se obter uma máquina de Mealy com estado inicial q_I, cujo comportamento entrada/saída a partir do estado q_I seja o correspondente ao vector regular $\overline{M}$, no sentido do §2.

Seja ρ uma relação de equivalência qualquer definida no conjunto das derivadas de $\overline{M}$. Designemos por $[D_s\overline{M}]_\rho$ o conjunto das derivadas de $\overline{M}$ equivalentes a $D_s\overline{M}$ segundo ρ, onde $\underline{s}$ é uma sucessão de entrada arbitrária.

PROPOSIÇÃO 1: Seja $S_{\overline{M}} = (I, Q, Z, \delta, \omega, q_I)$ onde I e Z são os conjuntos das entradas e das saídas correspondentes ao vector regular $\overline{M}$,

$Q = \{[D_s\overline{M}]_\rho : s \in I^*\}$

$\delta : I \times Q \to Q$ tal que $\delta(x, [D_s\overline{M}]_\rho) = [D_{sx}\overline{M}]_\rho$

$\omega : I \times Q \to Z$ tal que, sendo $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_t)$, se tem para $u = 1, \ldots, t$

$$\omega_u(x, [D_s\overline{M}]_\rho) = \begin{cases} z_{u,i} & \text{se } \lambda \in D_{sx}({}_uM_{I,i}) \\ z_{u,0} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$q_I = [D_\lambda\overline{M}]_\rho$

então, $S_{\overline{M}}$ é uma máquina de Mealy com estado inicial q_I, que satisfaz as condições definidas pelo vector regular $\overline{M}$, como expostas no § 1.

Dem.

Considere-se uma sucessão de entrada finita arbitrária $s = s_1 s_2 \ldots s_r$ e seja $s^0 = s_1 \ldots s_{r-1}$. De acordo com a definição de $S_{\overline{M}}$, a sucessão s^0 conduz a máquina do estado q_I para o estado $[D_{s^0}M]_\rho$, como pode ser provado por indução no comprimento da sucessão de entrada.

1) $\delta(s_1, q_I) = [D_{\lambda s_1}\overline{M}]_\rho = [D_{s_1}\overline{M}]_\rho$

2) se $s' = s_1 \ldots s_k$ conduz a máquina de q_I a $[D_{s'}\overline{M}]_\rho$, então $s'' = s' s_{k+1}$ conduz a máquina de q_I a $[D_{s''}\overline{M}]_\rho$, na verdade

$$\delta(s_{k+1}, [D_{s'}\overline{M}]_\rho) = [D_{s's_{k+1}}\overline{M}]_\rho = [D_{s''}\overline{M}]_\rho$$

A saída final após a aplicação de $\underline{s}$ a q_I é então $\omega_u(S_r, [D_{s^0}\overline{M}]_\rho)$, onde para $u = 1, \ldots, t$

$$\omega_u(S_r, [D_{s^0}\overline{M}]_\rho) = \begin{cases} z_{u,i} & \text{se } \lambda \in D_s({}_uM_{I,i}) \\ z_{u,0} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Atendendo a que $\lambda \in D_s({}_uM_{I,i})$ se $s \in {}_uM_{I,i}$, conclui-se que após a aplicação de $\underline{s}$ à máquina $S_{\overline{M}}$ no estado q_I, a última saída é $z_{u,i}$.

Assim, $S_{\overline{M}}$ iniciada no estado q_I satisfaz às condições definidas pelo vector $\overline{M}$, como expostas no § 1. ■

Para que, dado um vector regular $\overline{M}$, se possa definir uma máquina de Mealy $S_{\overline{M}}$ aplicando a Proposição 1, é necessário possuir um algoritmo efectivo para a determinação das classes de equivalência das derivadas de $\overline{M}$ segundo ρ, i. e., do conjunto

$$\{[D_sM]_\rho : s \in I^*\}$$

A relação ρ poderia ser uma relação de equivalência qualquer definida no conjunto das derivadas de $\overline{M}$, no entanto é conveniente poder utilizar uma relação ρ tal que a máquina obtida $S_{\overline{M}}$ seja mínima.

PROPOSIÇÃO 2: A máquina $S_{\overline{M}}$ definida como na Proposição 1 quando ρ é a igualdade de vectores regulares a menos de λ, i.e., quando

$$\overline{N} \rho \overline{M} \text{ sse } ({}_uN_{I,i} - \{\lambda\}) = ({}_uM_{I,i} - \{\lambda\}) \quad u = 1, \ldots, t \quad i = 1, \ldots, p-1$$

é uma máquina mínima.

Dem.

O conjunto das sucessões de entrada que aplicadas ao estado $q_k = [D_{s_k}\overline{M}]_\rho$, conduzem à saída final $z_{u,i}$ $(i=1,\ldots,p-1;\ u=1,\ldots,t)$ é $D_{s_k}\ ({}_uM_{I,i}) - \{\lambda\}$. Na verdade

$$\{v : s\,v \in {}_uM_{I,i},\ v \neq \lambda, \text{ com } D_s M \rho D_{s_k} M\} =$$
$$= \{v : v \in D_s\ ({}_uM_{I,i}),\ v \neq \lambda, \text{ com } D_s \overline{M} \rho D_{s_k}\overline{M}\} =$$
$$= D_{s_k}\ ({}_uM_{I,i}) - \{\lambda\}$$

Dois estados $q_k = [D_{s_k}\overline{M}]_\rho$ e $q_w = [D_{s_w}\overline{M}]_\rho$ são equivalentes sse a saída final é a mesma para cada sucessão de entrada independentemente de ser aplicada a q_k ou a q_w. Assim,

q_k e q_w são equivalentes sse $D_{s_k}\overline{M} \rho D_{s_w}\overline{M}$

i.e., sse $q_k = q_w$.

Em conclusão, não pode haver estados diferentes equivalentes, logo $S_{\overline{M}}$ é mínima. ■

No que se segue $|s|$ designa o comprimento da sucessão de entrada $\underline{s}$.

ALGORITMO 1 (ρ é a igualdade de vectores regulares a menos de λ):

PASSO 1: $L = 1,\ \mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0 = \{[D_\lambda \overline{M}]_\rho\}$

PASSO 2: $\mathfrak{D}_L = \{[D_{vx}\overline{M}]_\rho : x \in I,$
$[D_v\overline{M}]_\rho \in \mathfrak{D}_{L-1},\ [D_{vx}\overline{M}]_\rho \notin \mathfrak{D}\}$

PASSO 3: $\mathfrak{D} \cup \mathfrak{D}_L\ ,\ L = L+1$

PASSO 4: se $\mathfrak{D}_{L-1} \neq \phi$ executar PASSO 2
se $\mathfrak{D}_{L-1} = \phi$ FIM
$\mathfrak{D} = \{[D_s\overline{M}]_\rho : s \in I^*\}$

Dem.

O algoritmo apresentado fica demonstrado desde que se prove que

1) termina após um número finito de passos

2) no final $\mathfrak{D} = \{[D_s\overline{M}]_\rho : s \in I^*\}$

*
* *

1) Para provar que o algoritmo termina num número finito de passos, basta demonstrar que um vector regular tem um número finito de derivadas. De facto, se assim for, para um certo L todas as derivadas $D_s\overline{M}$ com $|s| = L$, pertencem a uma classe de equivalência $[D_r\overline{M}]_\rho$ com $r < L-1$; logo existe $L \in |N$ tal que $\mathfrak{D}_{L-1} = \phi$ e o algoritmo termina.

Como um vector regular é um k-plo ordenado de expressões regulares, provar que qualquer vector regular tem um número finito de derivadas equivale a provar que qualquer expressão regular R tem um número finito d_R de derivadas.

Esta última afirmação pode ser demonstrada por indução no número N de *operadores regulares*, utilizados na expressão regular. Entendemos por operador regular qualquer dos operadores utilizados na definição de expressão regular tal como é apresentada em [1] — p. 221: a concatenação, qualquer operador booleano sobre pares de expressões regulares e a operação estrela.

a) $N=0$. Neste caso R é ϕ, λ ou $a \in I$

$$D_s\phi = \phi \quad \forall s \in I^*$$
$$D_\lambda\lambda = \lambda\ ,\quad D_s\lambda = \phi \quad \forall s \in I^* - \{\lambda\}$$
$$D_\lambda a = a\ ,\quad D_a a = \lambda\ ,\quad D_s a = \phi$$
$$\forall s \in I^* - \{\lambda, a\}$$

A proposição é verdadeira para $N=o$ com $d_\phi = 1, d_\lambda = 2, d_a = 3$.

b) suponhamos que cada expressão regular X com N ou menos operadores regulares, tem um número finito de derivadas d_x. Se R é uma expressão regular com $N+1$ operadores regulares, pelo menos um dos 3 casos ocorre:

CASO 1: $R = f(P,Q)$, onde f é uma função booleana e P,Q têm N ou menos expressões regulares.

$$D_sR = f(D_sP, D_sQ) \Longrightarrow d_R \leq d_P.d_Q$$

pois $\underline{f}$ pode conduzir a valores diferentes apenas em pares ordenados diferentes e, quanto muito, existem $d_P.d_Q$ pares ordenados diferentes da forma (D_sP, D_sQ)

CASO 2: $R = PQ$, onde P,Q têm N ou menos operadores regulares.

Considere-se a função definida no conjunto das expressões regulares, tal que

$$\pi(R) = \begin{cases} \lambda & \text{se } \lambda \in R \\ \phi & \text{se } \lambda \notin R \end{cases}$$

Se $s = a_1a_2\ldots a_r$, então

$$D_sR = D_{a_1\ldots a_r}R = (D_{a_1\ldots a_1}P)Q$$
$$\vee\, \pi(D_{a_1\ldots a_{r-1}}P)\, D_{a_r}Q \vee \ldots$$

$$\ldots \vee \pi\left(D_{a_1}P\right)D_{a_2}\ldots a_r Q \vee \pi\left(P\right)D_{a_1}\ldots a_r Q$$

Portanto $D_s R$ é uma união de $(D_s P)Q$ com quanto muito $\underline{r}$ derivadas de Q. Como o número de subconjuntos de um conjunto com d_Q elementos é 2^{d_Q} ter-se-á,

$$d_R \leq d_P \cdot 2^{d_Q}$$

CASO 3: $R = P^*$, onde P tem N ou menos operadores regulares.

Neste caso $D_s R$ é uma união finita de termos da forma $(D_v P)\, P^*$ e portanto, por razões semelhantes às invocadas no caso anterior,

$$d_R \leq 2^{d_P}$$

Para que a argumentação anterior fique justificada, demonstra-se por indução no comprimento da sucessão de entrada que $D_s R$ é uma união finita de termos da forma $(D_v P)\, P^*$, c/ $v \neq \lambda$

a) $r=1$ $\quad D_{a_1}(P^*) = (D_{a_1} P)\, P^* \qquad \forall_{a_1 \in I}$

b) suponhamos que as derivadas de R, em relação a sucessões de comprimento menor ou igual a $\underline{r}$, são a união de termos da forma $(D_v P)\, P^*$, com $v \neq \lambda$, i.e.,

$$D_s\left(P^*\right) = \bigvee_{v \in F}\left(D_v P\right)P^*$$

onde F é um subconjunto finito de $I^* - \{\lambda\}$. Então, sendo $s' = s_1 \ldots s_r s_{r+1}$ uma sucessão de comprimento $r+1$

$$D_{s'}P^* = D_{s_{r+1}}\left(D_s P^*\right) = \bigvee_{v \in F} D_{s_{r+1}}\left)\left(D_v P\right)P^*\right) =$$

$$= \bigvee_{v \in F}\left(\left(D_{vs_{r+1}} P\right)P^* \vee \pi\left(D_v P\right)\left(D_{s_{r+1}} P\right)P^*\right)$$

o que também é uma união finita de termos da forma $(D_v P)\, P^*$, com $v \neq \lambda$.

2) Resta provar que no final

$$\mathfrak{D} = \left\{\left[D_s \overline{M}\right]_\rho : \; s \in I^*\right\}$$

Da construção de $\mathfrak{D}$ no algoritmo, é óbvio que $\mathfrak{D}$ é um conjunto de classes de equivalência do tipo $[D_s \overline{M}]_\rho$ com $s \in I^*$. Resta provar que

$$\left[D_s \overline{M}\right]_\rho \in \mathfrak{D} \qquad \forall_{s \in I^*}$$

Divide-se a demonstração em dois casos:

CASO 1: $s = N \leq L - 2$, onde L é o valor no final da aplicação do algoritmo.

Demonstramos por indução que

$$\left[D_s \overline{M}\right]_\rho \in \mathfrak{D}$$

a) $N = 0$

do PASSO 1 do algoritmo resulta $\left[D_\lambda \overline{M}\right]_\rho \in \mathfrak{D}_0 \subset \mathfrak{D}$

b) $N = k$

suponhamos que $\left[D_v \overline{M}\right]_\rho \in \mathfrak{D} \qquad \forall_{v:\, |v| = k}$,

então, como do PASSO 3 $\mathfrak{D} = \bigcup_{i=0}^{k} \mathfrak{D}_i$, temos que

$$\left[D_v \overline{M}\right]_\rho \in \mathfrak{D}_n \qquad \text{com} \qquad 0 \leq n \leq k$$

Sendo $|s| = k+1$, temos $s = vx$, onde $|v| = k$ e $x \in I$; aplicando o PASSO 2

$$\left[D_s \overline{M}\right]_\rho = \left[D_{vx} \overline{M}\right]_\rho \in \left(\bigcup_{i=0}^{k} \mathfrak{D}_i\right) \cup \mathfrak{D}_{k+1}$$

e portanto, atendendo ao PASSO 3

$$\left[D_s \overline{M}\right]_\rho \in \mathfrak{D}$$

CASO 2: $|s| \geq L - 1$

Provaremos por indução que

$$\mathfrak{D}_s = \phi \quad \text{e} \quad \left[D_s \overline{M}\right]_\rho \in \mathfrak{D} \qquad \forall_{\substack{N \geq L-1 \\ s:\, |s| < N}}$$

a) $N = L - 1$

do PASSO 4, $\qquad \mathfrak{D}_{L-1} = \phi$

do CASO 1 da presente demonstração

$$|s| < L - 1 \implies [D_s \overline{M}]_\rho \in \mathfrak{D}$$

b) suponhamos que para $|s| = k$, com $k \geq L - 1$, se tem

$$\mathfrak{D}_k = \phi \quad \text{e} \quad \left[D_s \overline{M}\right]_\rho \in \mathfrak{D} \qquad \forall_{s:\, |s| < k}$$

então, sendo $v \in I^*$ arbitrário, tal que $|v| = k + 1$, ter-se-á $v = sa$, com $|s| = k$ e $a \in I$

Do PASSO 2,

$$\mathfrak{D}_k = \phi \implies \exists_{r:\, |r| < k-1} : \left(D_s M\right) \rho \left(D_r \overline{M}\right)$$

mas então $(D_v\overline{M})\ \rho\ (D_{ra}\overline{M})$, onde $|ra| < k$, logo $\mathfrak{D}_{k+1} = \emptyset$ e também

$$\left[D_v\overline{M} \right]_\rho = \left[D_{ra}\overline{M} \right]_\rho \in \mathfrak{D} \qquad \blacksquare$$

EXEMPLO 1: Considere-se o conjunto de entradas $I = \{0, 1, b\}$ e o conjunto de saídas $Z = \{b, 0, 1, 2\}^2$, correspondentes a dois terminais de saída em que podem ocorrer três símbolos; designamos $z_{u,o} = b$, $z_{u,1} = 0$, $z_{u,2} = 1$, $z_{u,3} = 2$ para $u = 1, 2, 3$. Considere-se também o vector regular $\overline{M}$ definido abaixo.

Pode ver-se com facilidade que $\overline{M}$ define o comportamento entrada/saída de uma máquina que converte a representação na base 2 de números de 0 a 8, na sua representação na base 3. Os bits entram em série por ordem decrescente de significação e os números são precedidos e terminados com o símbolo $\underline{b}$. Qualquer sucessão de símbolos de entrada que não termine com o fim de um número de 0 a 8, provoca a saída $\underline{b}$.

Pretende-se obter uma máquina de Mealy correspondente que seja mínima, aplicando o ALGORITMO 1 e a PROPOSIÇÃO 1.

$$\overline{M} = [\, A^*b0^*(0 \vee 11 \vee 110)\, b, A^*b0^*(1 \vee 100 \vee 111)\, b, A^*b0^*(10 \vee 101 \vee 1000)\, b, A^*b0^*(0 \vee 1 \vee 10)\, b,$$
$$A^*b0^*(11 \vee 10B)\, b, A^*b0^*(11B \vee 1000)\, b\,]$$

onde $A = 0 \vee 1 \vee b$ e $B = 0 \vee 1$.

Comecemos pela aplicação do ALGORITMO 1 para obter o conjunto

$$\mathfrak{D} = \left\{ \left[D_s\overline{M} \right]_\rho : s \in I^* \right\}$$

PASSO 1: $D_\lambda\overline{M} = \overline{M}$, $L = 1$, $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0 = \left\{ \left[\overline{M} \right]_\rho \right\}$

PASSO 2: $D_0\overline{M} = \overline{M}$

$D_1\overline{M} = \overline{M}$

$D_b\overline{M} = [\, {}_1M_1 \vee 0^*(0 \vee 11 \vee 110)\, b, {}_1M_2 0^*(1 \vee 100 \vee 111)\, b, {}_1M_3 \vee 0^*(10 \vee 101 \vee 1000)\, b,$
${}_2M_1 \vee 0^*(0 \vee 1 \vee 10)\, b, {}_2M_2 \vee 0^*(11 \vee 10B)\, b, {}_2M_3 \vee 0^*(11B \vee 1000)\, b\,]$

$\mathfrak{D}_1 = \left\{ \left[D_b\overline{M} \right]_\rho \right\}$

PASSO 3: $\mathfrak{D} = \left\{ \left[\overline{M} \right]_\rho, \left[D_b\overline{M} \right]_\rho \right\}$, $L = 2$

PASSO 4: executar PASSO 2

PASSO 2: $D_{b0}\overline{M} = [\, D_b({}_1M_1) \vee b, D_b({}_1M_2), D_b({}_1M_3), D_b({}_2M_1) \vee b, D_b({}_2M_2), D_b({}_2M_3)\,]$

$D_{b1}\overline{M} = [\, {}_1M_1 \vee (1 \vee 10)\, b, {}_1M_2 \vee (\lambda \vee 00 \vee 11)\, b, {}_1M_3 \vee (0 \vee 01 \vee 000)\, b, {}_2M_1 \vee (\lambda \vee 0)\, b, {}_2M_2 \vee$
$\vee\, (1 \vee 0B)\, b, {}_2M_3 \vee (1B \vee 000)\, b\,]$

$D_{bb}\overline{M} = D_b\overline{M}$

$\mathfrak{D}_2 = \left\{ \left[D_{b0}\overline{M} \right]_\rho, \left[D_{b1}\overline{M} \right]_\rho \right\}$,

PASSO 3: $\mathfrak{D} = \left\{ \left[\overline{M} \right]_\rho, \left[D_b\overline{M} \right]_\rho, \left[D_{b0}\overline{M} \right]_\rho, \left[D_{b1}\overline{M} \right]_\rho \right\}$, $L = 3$

PASSO 4: executar PASSO 2

PASSO 2: $D_{b00}\overline{M} = D_{b0}\overline{M}$

$D_{b01}\overline{M} = D_{b1}\overline{M}$

$D_{b0b}\overline{M} = [\, D_b({}_1M_1) \vee \lambda, D_b({}_1M_2), D_b({}_1M_3), D_b({}_2M_1) \vee \lambda, D_b({}_2M_2), D_b({}_2M_3)\,]$

$D_{b10}\overline{M} = [\, {}_1M_1, {}_1M_2 \vee 0b, {}_1M_3 \vee (\lambda \vee 1 \vee 00)\, b, {}_2M_1 \vee b, {}_2M_2 \vee Bb, {}_2M_3 \vee 00b\,]$

$D_{b11}\overline{M} = [\, {}_1M_1 \vee (\lambda \vee 0)\, b, {}_1M_2 \vee b, {}_1M_3, {}_2M_1 \vee b, {}_2M_2 \vee Bb, {}_2M_3 \vee Bb\,]$

$D_{b1b}\overline{M} = [\, D_b({}_1M_1), D_b({}_1M_2) \vee \lambda, D_b({}_1M_3), D_b({}_2M_1) \vee \lambda, D_b({}_2M_2), D_b({}_2M_3)\,]$

Note-se que $\left(D_{b0b}\overline{M} \right) \rho \left(D_b\overline{M} \right)$ e que $\left(D_{b1b}\overline{M} \right) \rho \left(D_b\overline{M} \right)$

$\mathfrak{D}_3 = \left\{ \left[D_{b10}\overline{M} \right]_\rho, \left[D_{b11}\overline{M} \right]_\rho \right\}$

PASSO 3: $\mathfrak{D} = \left\{ \left[\overline{M} \right]_\rho, \left[D_b\overline{M} \right]_\rho, \left[D_{b0}\overline{M} \right]_\rho, \left[D_{b1}\overline{M} \right]_\rho, \left[D_{b10}\overline{M} \right]_\rho, \left[D_{b11}\overline{M} \right]_\rho \right\}$, $L = 4$

PASSO 4: executar PASSO 2

PASSO 2: $D_{b100}\overline{M} = [\,{}_1M_1, {}_1M_2 \vee b, {}_1M_3 \vee 0b, {}_2M_1, {}_2M_2 \vee b, {}_2M_3 \vee 0b\,]$

$D_{b101}\overline{M} = [\,{}_1M_1, {}_1M_2, {}_1M_3 \vee b, {}_2M_1, {}_2M_2 \vee b, {}_2M_3\,]$

$D_{b10b}\overline{M} = [\,D_b({}_1M_1), D_b({}_1M_2), D_b({}_1M_3) \vee \lambda, D_b({}_2M_1) \vee \lambda, D_b({}_2M_2), D_b({}_2M_3)\,]$

$D_{b110}\overline{M} = [\,{}_1M_1 \vee b, {}_1M_2, {}_1M_3, {}_2M_1, {}_2M_2, {}_2M_3 \vee b\,]$

$D_{b111}\overline{M} = [\,{}_1M_1, {}_1M_2 \vee b, {}_1M_3, {}_2M_1, {}_2M_2, {}_2M_3 \vee b\,]$

$D_{b11b}\overline{M} = [\,D_b({}_1M_1) \vee \lambda, D_b({}_1M_2), D_b({}_1M_3), D_b({}_2M_1), D_b({}_2M_2) \vee \lambda, D_b({}_2M_3)\,]$

Note-se que $\left(D_{b10b}\overline{M}\right) \rho \left(D_b\overline{M}\right)$ e que $\left(D_{b11b}\overline{M}\right) \rho \left(D_b\overline{M}\right)$

$\mathfrak{D}_4 = \left\{ [\,D_{b100}\overline{M}\,]_\rho, [\,D_{b101}\overline{M}\,]_\rho, [\,D_{b110}\overline{M}\,]_\rho, [\,D_{b111}\overline{M}\,]_\rho \right\}$

PASSO 3: $\mathfrak{D} = \left\{ [\,\overline{M}\,]_\rho, [\,D_b\overline{M}\,]_\rho, [\,D_{b0}\overline{M}\,]_\rho, [\,D_{b1}\overline{M}\,]_\rho, [\,D_{b10}\overline{M}\,]_\rho, [\,D_{b11}\overline{M}\,]_\rho, [\,D_{b100}\overline{M}\,]_\rho, [\,D_{b101}\overline{M}\,]_\rho, [\,D_{b110}\overline{M}\,]_\rho, [\,D_{b111}\overline{M}\,]_\rho \right\}$, $L = 5$

PASSO 4: executar PASSO 2

PASSO 2: $D_{b1000}\overline{M} = [\,{}_1M_1, {}_1M_2, {}_1M_3 \vee b, {}_2M_1, {}_2M_2, {}_2M_3 \vee b\,]$

$D_{b1001}\overline{M} = \overline{M}$

$D_{b100b}\overline{M} = [\,D_b({}_1M_1), D_b({}_1M_2) \vee \lambda, D_b({}_1M_3), D_b({}_2M_1), D_b({}_2M_2) \vee \lambda, D_b({}_2M_3)\,]$

$D_{b1010}\overline{M} = \overline{M}$

$D_{b1011}\overline{M} = \overline{M}$

$D_{b101b}\overline{M} = [\,D_b({}_1M_1), D_b({}_1M_2), D_b({}_1M_3) \vee \lambda, D_b({}_2M_1), D_b({}_2M_2), D_b({}_2M_3) \vee \lambda\,]$

$D_{b1100}\overline{M} = \overline{M}$

$D_{b1101}\overline{M} = \overline{M}$

$D_{b110b}\overline{M} = [\,D_b({}_1M_1) \vee \lambda, D_b({}_1M_2), D_b({}_1M_3) \vee \lambda, D_b({}_2M_1), D_b({}_2M_2) \vee \lambda, D_b({}_2M_3)\,]$

$D_{b1110}\overline{M} = \overline{M}$

$D_{b1111}\overline{M} = \overline{M}$

$D_{b111b}\overline{M} = [\,D_b({}_1M_1), D_b({}_1M_2) \vee \lambda, D_b({}_1M_3), D_b({}_2M_1), D_b({}_2M_2), D_b({}_2M_3) \vee \lambda\,]$

$\left(D_{b100b}\overline{M}\right) \rho \left(D_b\overline{M}\right)$, $\left(D_{b101b}\overline{M}\right) \rho \left(D_b\overline{M}\right)$,

$\left(D_{b110b}\overline{M}\right) \rho \left(D_b\overline{M}\right)$, $\left(D_{b111b}\overline{M}\right) \rho \left(D_b\overline{M}\right)$

$\mathfrak{D}_5 = \left\{ [\,D_{b1000}\overline{M}\,] \right\}$

PASSO 3: $\mathfrak{D} = \left\{ [\,\overline{M}\,]_\rho, [\,D_b\overline{M}\,]_\rho, [\,D_{b0}\overline{M}\,]_\rho, [\,D_{b1}\overline{M}\,]_\rho, [\,D_{b10}\overline{M}\,]_\rho, [\,D_{b11}\overline{M}\,]_\rho, [\,D_{b100}\overline{M}\,]_\rho, [\,D_{b101}\overline{M}\,]_\rho, [\,D_{b110}\overline{M}\,]_\rho, [\,D_{b111}\overline{M}\,]_\rho, [\,D_{b1000}\overline{M}\,]_\rho \right\}$, $L = 6$

PASSO 4: executar PASSO 2

PASSO 2: $D_{b10000}\overline{M} = \overline{M}$

$D_{b10001}\overline{M} = \overline{M}$

$D_{b1000b}\overline{M} = [\,D_b({}_1M_1), D_b({}_1M_2), D_b({}_1M_3) \vee \lambda, D_b({}_2M_1), D_b({}_2M_2), D_b({}_2M_3) \vee \lambda\,]$

Note-se que $\left(D_{b1000b}\overline{M}\right) \rho \left(D_b\overline{M}\right)$

$\mathfrak{D}_6 = \phi$

PASSO 3: $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}$, $L = 7$

PASSO 4: $\mathfrak{D}_6 = \phi$. FIM.

Aplicando agora a PROPOSIÇÃO 1, podemos concluir que uma máquina mínima correspondente ao vector regular $\overline{M}$ é $S_{\overline{M}} = (I, Q, Z, \delta, \omega, q_I)$, tal que

$Q = \mathfrak{D}$

$q_I = [D_\lambda \overline{M}]_\rho$

as aplicações δ e ω são definidas pela TABELA I

*
* *

Para que o algoritmo apresentado seja eficaz é necessário que, dadas duas expressões regulares quaisquer, se possa avaliar se são iguais ou diferentes. Acontece que essa decisão nem sempre é fácil [2] — pg. 68, 69. Já foram desenvolvidos algoritmos para determinar se duas expressões regulares são iguais [2] — pg. 80-83, mas nem sempre são de aplicação cómoda.

Apresentamos a seguir um algoritmo em que a relação de equivalência ρ é a semelhança entre vectores regulares, e não a igualdade. Duas expressões regulares são semelhantes [1] — pg. 233 sse uma pode ser transformada na outra usando as identidades

$$P \vee P = P \ , \ P \vee Q = Q \vee P \ , \ (P \vee Q) \vee S = P \vee (Q \vee S)$$

Como se vê, é fácil averiguar se duas expressões regulares são ou não são semelhantes.

ALGORITMO 2 (ρ é a semelhança de vectores regulares a menos de λ, i.e.,

$\overline{N} \ \rho \ \overline{M}$ sse $({}_uN_{I,i} - \{\lambda\})$ é semelhante a $({}_uN_{I,i} - \{\lambda\})$

$$\forall_{\substack{u=1,\ldots,t \\ i=1,\ldots,s-1}}$$

— A descrição do algoritmo é igual à descrição do ALGORITMO 1, em que a relação ρ é agora a semelhança a menos de λ, acabada de definir.

Dem.

O algoritmo fica demonstrado desde que se prove que:

1) termina após um número finito de passos
2) no final

$$\mathfrak{D} = \{ [D_s\overline{M}]_\rho : s \in I^* \}$$

*
* *

1) Argumentando como para o ALGORITMO 1, basta demonstrar que qualquer expressão regular R tem um número finito d_R de derivadas semelhantes.

A demonstração é muito semelhante à do ALGORITMO 1. É também por indução no número N de operadores regulares utilizados na expressão regular.

a) $N=0$. Análoga à demonstração para o ALGORITMO 1

b) suponha-se que cada expressão regular X com N ou menos operadores regulares tem um número finito d_X de derivadas não semelhantes. Se R é uma expressão regular com $N+1$ operadores regulares, tal como na demonstração do ALGORITMO 1, pelo menos um de três casos ocorre:

CASO 1: $R = f(P, Q)$. onde $\underline{f}$ é uma função booleana e P, Q têm N ou menos operadores regulares.

Neste caso

$$D_sR = f(D_sP, D_sQ)$$

Se D_sP e D_sQ são semelhantes a $D_{s'}P$ e $D_{s'}Q$, respectivamente, então pode-se passar de $f(D_sP, D_sQ)$ a $f(D_{s'}P, D_{s'}Q)$ usando as identidades de semelhança, visto que por definição se pode passar de D_sP a $D_{s'}P$ e de D_sQ a $D_{s'}Q$ utilizando essas identidades.

Mas,

$$D_{s'}R = f(D_{s'}P, D_{s'}Q)$$

e portanto, $D_{s'}R$ é semelhante a D_sR. Analogamente ao que concluimos no ALGORITMO 1, será então

$$d_R \leq d_P \cdot d_Q$$

CASO 2: $R = PQ$, onde P, Q têm N ou menos operadores regulares.

A demonstração é análoga à apresentada para o ALGORITMO 1, com alterações óbvias. Também neste caso

$$d_R \leq d_P \cdot 2^{dQ}$$

CASO 3: $R = P^*$, onde P tem N ou menos operadores regulares.

A demonstração é também análoga à do ALGORITMO 1. Também

$$d_R \leq 2^{dP}$$

2) A demonstração de 2) já foi apresentada aquando do ALGORITMO 1. ■

5. Algoritmos para máquinas de Moore

Neste parágrafo estabelecem-se resultados análogos aos do parágrafo anterior, mas agora para máquinas de Moore.

PROPOSIÇÃO 3: Seja $S_{\overline{M}} = (I, Q, Z, \delta, \omega, q_I)$, onde I e Z são os conjuntos de entradas e de saídas correspondentes ao vector regular $\overline{M}$,

$Q = \{ [D_s\overline{M}]_\rho : s \in I^* \}$

$\delta : I \times Q \rightarrow Q$ tal que $\delta(x, [D_s\overline{M}]_\rho) = [D_{sx}\overline{M}]_\rho$

$\omega : Q \rightarrow Z$ tal que, sendo $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_t)$, se tem para $u = 1, \ldots, t$

$$\omega_u([D_s\overline{M}]_\rho) = \begin{cases} z_{u,i} & \text{se } \lambda \in D_{s^\circ}({}_uM_i) \\ z_{u,o} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$q_I = [D_\lambda \overline{M}]_\rho$

então, $S_{\overline{M}}$ é uma máquina de Moore com estado inicial q_I, que satisfaz as condições definidas pelo vector regular $\overline{M}$, como expostas no § 1.

Dem.

Foi demonstrado na PROPOSIÇAO 1 que qualquer sucessão de entrada s° conduz a máquina do estado q_I para o estado $[D_{s^\circ}\overline{M}]_\rho$

Assim, a saída final após a aplicação de s° a q_I é então $\omega([D_{s^\circ}\overline{M}]_\rho)$, onde para $u = 1, \ldots, t$

$$\omega_u([D_{s^\circ}\overline{M}]_\rho) = \begin{cases} z_{u,i} & \text{se } \lambda \in D_{s^\circ}({}_uM_i) \\ z_{u,o} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Atendendo a que $\lambda \in D_{s^\circ}({}_uM_{I,i})$ sse $s^\circ \in {}_uM_{I,i}$, concluiu-se que após a aplicação de s° ao estado q_I, a última saída é $z_{u,i}$.

Assim $S_{\overline{M}}$ iniciada no estado q_I satisfaz às condições definidas pelo vector $\overline{M}$, como expostas no § 1. ■

PROPOSIÇAO 4: A máquina $S_{\overline{M}}$ definida como na PROPOSIÇAO 2, quando ρ é a igualdade de vectores regulares, é uma máquina mínima.

Dem.

A demonstração é análoga à da PROPOSIÇAO 2.

O conjunto das sucessões de entrada que, aplicadas ao estado $q_k = [D_{s_k}\overline{M}]_\rho$ conduzem à saída final $z_{u,i}$ $(i=1, \ldots, p-1;\ u=1, \ldots, t)$ é $D_{s_k}({}_uM_{I,i})$. Na verdade,

$$\{v : sv \in {}_uM_{I,i}, \text{ com } D_s\overline{M}\,\rho\, D_{s_k}\overline{M}\}$$

$$= \{v : \in D_{s_k}({}_uM_{I,i})\} = D_{s_k}({}_uM_{I,i})$$

Dois estados $q_k = [D_{s_k}\overline{M}]_\rho$ e $q_w = [D_{s_w}\overline{M}]_\rho$ são estados equivalentes sse a saída final é a mesma para cada sucessão de entrada, independentemente de ser aplicada a q_k ou a q_w. Assim,

q_k e q_w são equivalentes sse $D_{s_k}M = D_{s_w}M$,

i. e., sse $q_k = q_w$

Em conclusão, não pode haver estados diferentes equivalentes, e portanto $S_{\overline{M}}$ é mínima.

A aplicação da Proposição 3 só é possível conhecido o conjunto

$$\mathfrak{D} = \{[D_s\overline{M}]_\rho : s \in I^*\}$$

Os ALGORITMOS 1 e 2, já apresentados, servem para este efeito quando ρ é a igualdade ou a semelhança de vectores regulares.

Referências bibliográficas

[1] BOOTH, T. L., (1967), Sequential Machines and Automata Theory. John Wiley and Sons, Inc., New York.

[2] GINZBURG, A. (1968), Algebraic Theory of Automata. Academic Press.

TABELA I

	0	1	b
$q_I = [D_\lambda\overline{M}]_\rho$	q_I/ (b, b)	q_I/ (b, b)	q_1/ (b, b)
$q_1 = [D_b\overline{M}]_\rho$	q_2/ (b, b)	q_3/ (b, b)	q_1/ (b, b)
$q_2 = [D_{b0}\overline{M}]_\rho$	q_2/ (b, b)	q_3/ (b, b)	q_1/ (0, 0)
$q_3 = [D_{b1}\overline{M}]_\rho$	q_4/ (b, b)	q_5/ (b, b)	q_1/ (1, 0)
$q_4 = [D_{b10}\overline{M}]_\rho$	q_6/ (b, b)	q_7/ (b, b)	q_1/ (2, 0)
$q_5 = [D_{b11}\overline{M}]_\rho$	q_8/ (b, b)	q_9/ (b, b)	q_1/ (0, 1)
$q_6 = [D_{b100}\overline{M}]_\rho$	q_{10}/ (b, b)	q_I/ (b, b)	q_1/ (1, 1)
$q_7 = [D_{b101}\overline{M}]_\rho$	q_I/ (b, b)	q_I/ (b, b)	q_1/ (2, 1)
$q_8 = [D_{b110}\overline{M}]_\rho$	q_I/ (b, b)	q_I/ (b, b)	q_1/ (0, 2)
$q_9 = [D_{b111}\overline{M}]_\rho$	q_I/ (b, b)	q_I/ (b, b)	q_1/ (1, 2)
$q_{10} = [D_{b1000}\overline{M}]_\rho$	q_I/ (b, b)	q_I/ (b, b)	q_1/ (2, 2)

NÚMERO 439 MARÇO DE 1977 ANO LII VOLUME XXXVIII

C. D. U. 621-50:621-514:621-519:621-52:621.311.2:621.316.72

Contrôle des systèmes d'énergie dans un ensemble hydro-électrique

JOSÉ LUÍS DE OLIVEIRA PAULO
Eng.º Electrotécnico, IST

RESUMO

Este artigo, baseado num relatório de estágio feito na central hidroeléctrica de Sisteron, no sul de França, descreve sucintamente os sistemas de controlo de energia neste aproveitamento. Primeiramente é feita uma descrição geral do aproveitamento hidroeléctrico de Curbans/Sisteron. Após uma série de considerações teóricas sobre controlo de energia, referem-se as cadeias e os órgãos de controlo da central de Sisteron.

SYNOPSIS

This paper, reprinted from a trainee report done in the hydro powerstation of Sisteron, in the south of France, shortly describes the power control systems in that powerstation. First a general description of Curbans/Sisteron plant is presented. They are introduced several theorical considerations about powercontrol and at last the main regulating circuit elements are described.

I — DESCRIPTION DES AMÉNAGEMENTS. GENERALITÉS

1. Chute de Curbans

1.1. Caractéristiques génerales

La chute de Curbans turbine les eaux de la Durance prises dans le bassin de compensation d'Espinasses et les restitue dans la Durance en amont de la prise de La Saulce.

L'ensemble comprend:

- un barrage existant du bassin de compensation d'Espinasses;
- une prise d'ean sur la rive gauche du barrage, obturé par deux batardeaux;
- un canal d'amenée d'une longuenr de 5250 m;
- une galerie d'amenée, revêtue, d'une section fer à cheval de 9,0 m de diamètre et d'une longueur de 9040 m;
- une cheminée d'équilibre à étranglement avec des vannes des groupes, chambres d'expansion et déversante;
- un déchargeur capable du débit d'un groupe, débouchant dans le puits à vortex d'évacuation des eaux déversées par la cheminée;
- trois conduites forcées en puits blindé de 5 m de diamètre et 3×95 m de longueur;
- l'usine souterraine et le poste en surface;
- trois rameaux de fuite de 6,0 m de diamètre;
- une galerie de fuite à écoulement libre d'une section fer à cheval de 10,30 m de diamètre et d'une longueur de 1796 m;
- un canal de fuite d'une longueur de 1340 m.

1.2. Usine souterraine et poste extérieur

L'usine de Curbans est equipée avec trois groupes à axe vertical tournant à 200 t/mn, composés d'une turbine Francis et d'un alternateur de 55 MVA. Chaque groupe est relié avec un transformateur de tension 10,3/225 kV installé dans le poste extériuer. Les trois groupes sont reliés au poste par trois jeux de barres 10 kV, dans les puits de barres installés.

Le poste extérieur est équipé de deux départs vers Grisolles et Sisteron/St. Auban.

2. Chute de Sisteron

2.1. Caractéristiques génerales

La chute de Sisteron turbine les eaux de la Durance prises immédiatement à l'aval de l'usine de Curbans et les restitue dans le Buech à son coufluent avec la Durance, en amont de la ville de Sisteron.

L'ensemble comprend:

- un barrage en rivière, La Saulce;
- une prise d'eau sur la rive droite du barrage, equipée de grilles et dégrilleur;
- un canal d'amenée d'une longueur de 32 km;
- une chambre d'eau à l'extrémité aval du canal, equipée d'une grille et de deux vannes de garde avec batardeaux à l'amont;
- deux conduites forcées en puits vertical; diamètre 6 m; longueurs: 145 et 154 m;
- l'usine souterraine et le poste extérieur;
- une galerie de fuite, d'une longueur de 1052 m commun aux deux groupes.

2.2. Usine souterraine et poste extériuer

L'usine de Sisteron fonctionne synchronement avec celle de Curbans. L'usine souterraine est reliée à l'extérieur par une galerie de 390 m de long, et equipéc avec deux groupes à axe vertical du type Francis, turbinant simultanément, sous chute nette de 109,51 m, un débit maximum de 241 m³/s. Chaque groupe est relié avec un transformateur élévateur 15,5/225 kV, de 128 MVA.

Les deux transformateurs sont reliés au poste extérieur par six câbles H. T.

Le poste extérieur est equipé avec quatre départs, permettant le passage en coupure de deux lignes 225 kV, et d'une travée de transformateur 225/63 kV avec départs 63 kV.

L'alimentation des auxiliaires généraux et de groupe est faite à partir d'un transformateur 15 kV/ /380 V et Diésel en secours.

2.3. Caractéristiques de l'alternateur

— Puissance apparente nominale aux bornes en service continu (S_n)	128 MVA
— Puissance active nominale aux bornes en service continu pour le facteur de puissance et la tension nominale (P_n)	118 MW
— Puissance réactive nominale aux bornes en service continu pour le facteur de puissance et la tension nominale (Q_n)	51 MVAR
— Puissance active maximale en service continu...	124,5 MW
— Tension nominale aux bornes entre phases	15,5 kV
— Facteur de puissance nominal en service continu en fourniture d'enérgie réactive (cos φ_n)	0,92
— Courant nominal triphase 50 Hz (I_n)	4770 A
— Vitesse de rotation synchrone (N_s)	187,5 tr/mn
— Vitesse de rotation à l'emballement	352 tr/mn
— Vitesse maximale instantanée (N_m)	307 tr/mn
— Paires de pôles...	16
— Réactance synchrone longitudinale ou directe en régime non saturé	x_d=151%
— Réactance transitoire longitudinale en régime non saturé	x'_d=31%
— Réactance subtransitoire longitudinale	x''_d=28,4%

Le point neutre de l'enroulement stator est mis à la terre utilisant une résistance qui limite le courant de défaut à 5 A.

Chaque alternateur (à pôles sailants) peut travailler comme compensateur synchrone, absorvant 64 MVAR, avec une tension variable de 0,95 U_n à 1,1 U_n (U_n tension nominale).

II — CONTRÔLE DES SYSTÈMES D'ÉNERGIE

1. Introduction

1.1. Contrôle de fréquence et puissance active

Les variations de fréquence sont provoquées par les variations de puissance demandée aux générateurs donc la necessité de contrôler la puissance pour maintenir la valeur de fréquence entre les limites admissibles.

La puissance active est reglée agissant sur les binaires des turbines des deux groupes générateurs; en contrôlant la position des vannes d'admission de l'eau dans la turbine et donc les binaires, on impose la puissance électrique à la sortie des groupes générateurs.

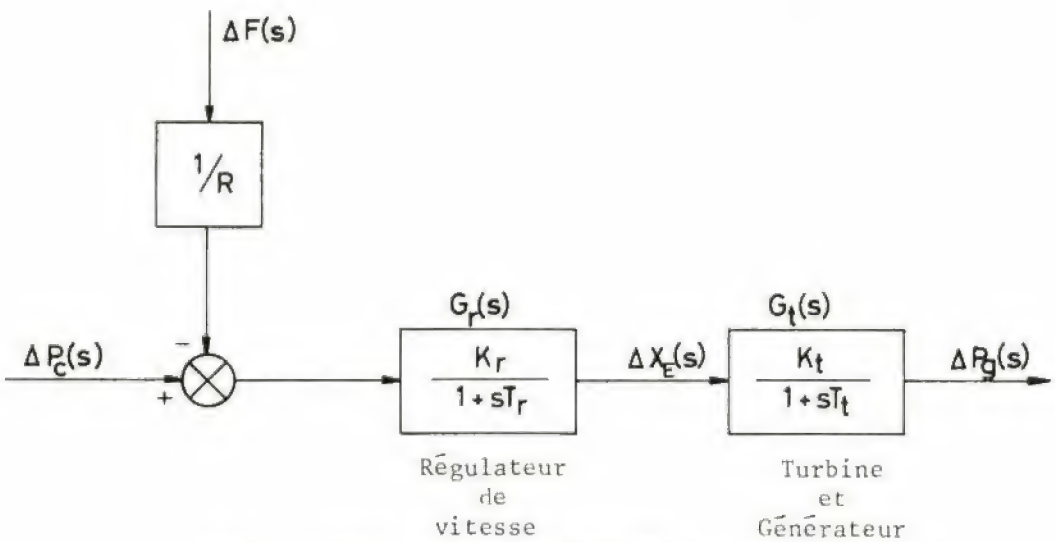
La boucle de réglage d'un groupe générateur comprend:

- le groupe tournant dont la grandeur d'entrée est la position des vannes, la grandeur de sortie la vitesse de rotation (ou la fréquence) et la grandeur perturbatrice la puissance demandée par le réseau;

— le régulateur de vitesse dont la grandeur d'entrée est la vitesse de rotation du groupe tournant et la grandeur de sortie la position donnée aux vannes.

La boucle de réglage d'un groupe sera donc la suivante (voir fig. 1):

Lorsque la charge varie et la valeur de consigne de puissance se mantient, $\triangle P_c = 0$, (réglage primaire) il existe un déséquilibre entre les puissances fournies et demandées, compensé par prélèvement sur l'inertie des groupes tournants, ce qui provoque un ralentissement (ou une accélération) de ces groupes et donc une baisse (ou une augmentation) de la



$G_r(s)$ — fonction de transfert du régulateur
$G_t(s)$ — fonction de transfert du groupe turbo-alternateur
$\triangle P_c(s)$ — variation de la valeur de la puissance de consigne
$\triangle P_g(s)$ — variation de la puissance fournie par le groupe
$\triangle X_E(s)$ — variation de la position de la vanne d'admission
$\triangle F(s)$ — variation de fréquence
R — statisme permanent
s — variable de Laplace

Fig. 1
Boucle de régulation de fréquence et puissance d'un groupe turbo-alternateur

Lorsqu'un groupe n'est pas couplé au résean sa puissance électrique est nulle; le réglage de la fréquence doit être realisé pendant le couplage du groupe au résean pour amenée ou ramenée la fréquence à sa valeur de consigne (démarrage ou après déclenchement).

Lorsqu'il est couplé au réseau (de puissance très supérieure à la sienne, «infinie»), la fréquence est imposé par le réseau et donc independente de la puissance fournie par le groupe. Dans ce cas $\triangle F(s) = 0$, donc:

$$\triangle P_g(s) = \frac{K_r}{1+sT_r} \cdot \frac{K_t}{1+sT_t} \triangle P_c(s).$$

fréquence, car celle-ci est en relation avec l'énergie cinétique emmagasinée dans les masses tournantes selon l'équation:

$$W_{cin} = \frac{1}{2} I \frac{\omega_n^2}{P_n} = 2\pi^2 I f_n^2$$

I — moment d'inertie
P_n — puissance nominal
ω_n — vitesse nominal
f_n — fréquence nominal

Lorsqu'on a une variation de vitesse du groupe, le régulateur de la turbine agit sur les vannes

d'admission de l'eau, en rétablissant un nouvean régime d'équilibre des puissances. Dans ce nouvean régime, la fréquence aura une valeur differente de sa valeur nominale (qu'il faut maintenir) et donc on aura besoin de corriger cet écart par un réglage de la valeur de consigne de puissance, ΔP_c. Si la variation de cette valeur de consigne est nulle, on obtient l'équation de transfert:

$$\Delta P_g(s) = \frac{1}{(1+sT_r)(1+sT_t)}\left(-\frac{\Delta F(s)}{R}\right)$$

(on admettant que $K_r K_t = 1$)

La central de Sisteron est affectée d'un statisme global résultant des statismes des deux groupes et qui lie la fréquence à la puissance totale. Le statisme de chaque groupe est de 5% (voir fig. 2).

En cas d'apparition brusque de charge, pour annuler l'écart de fréquence, il faut un réglage secondaire avec une caractéristique intégrale. Le réglage secondaire est donc un réglage astatique. Ce réglage doit aussi annuler les variations des puissances transitant sur les lignes d'interconexion entre plusieurs réseaux en parallèle, en régime permanent, en maintenant les valeurs fixes pour cettes puissances (voir fig. 3).

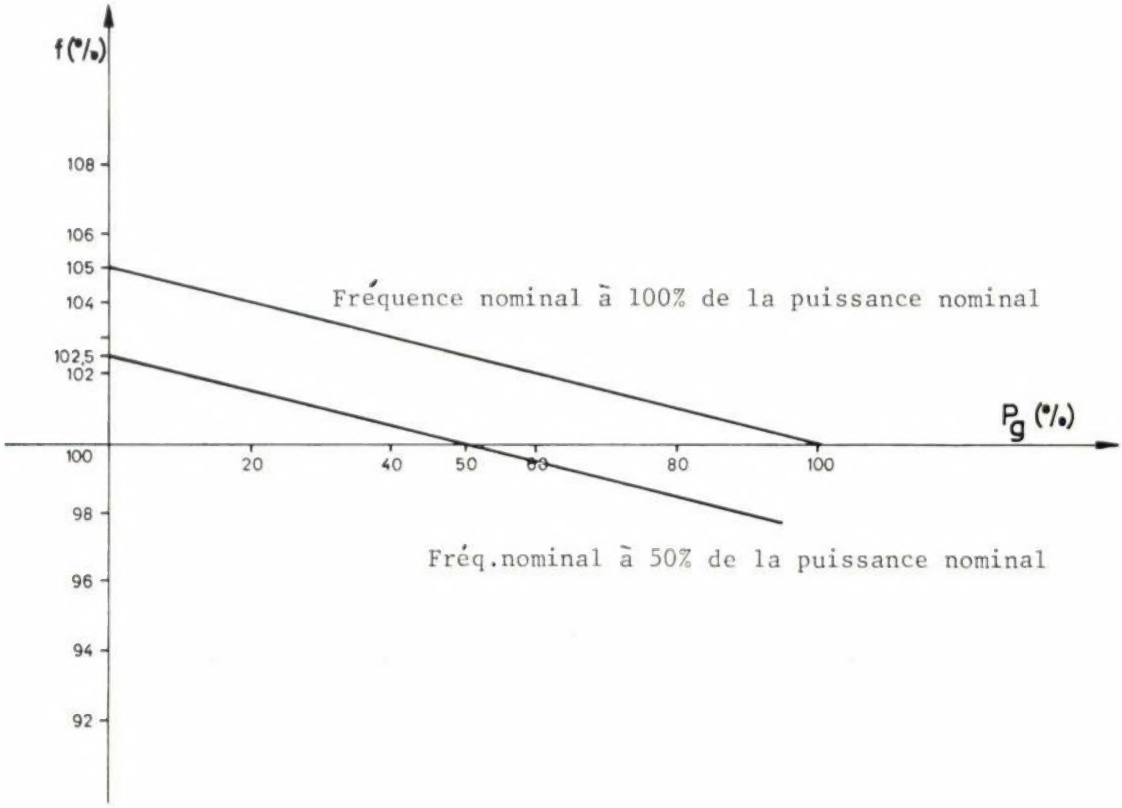


Fig. 2
Caractéristique fréquence-puissance en régime permanent

Pour une variation échelon de puissance $\Delta P_g(s)$ et en utilisant le théorème de la valeur finale, on aura en régime permanent:

$$\frac{\Delta F_{stat}}{\Delta P_{gstat}} = -R \text{ [Hz/MW ou p. u.]}$$

R — statisme permanent

Le statisme permanent R est la taux de variation de la fréquence avec la puissance active fournie.

Avec un réglage secondaire les générateurs sont divisés en deux groupes:

— ceux qui sont programmés en fournissant une puissance constante pré-établie;
— et ceux qui doivent annuler l'écart entre la puissance appelée par le résean et la puissance fournie.

Note: Sur le cas de Sisteron il faut lire le chapitre sur les consignes de puissance.

en pont de Graetz, qui tournent avec le rotor. L'excitation de l'excitatrice principale est faite par une

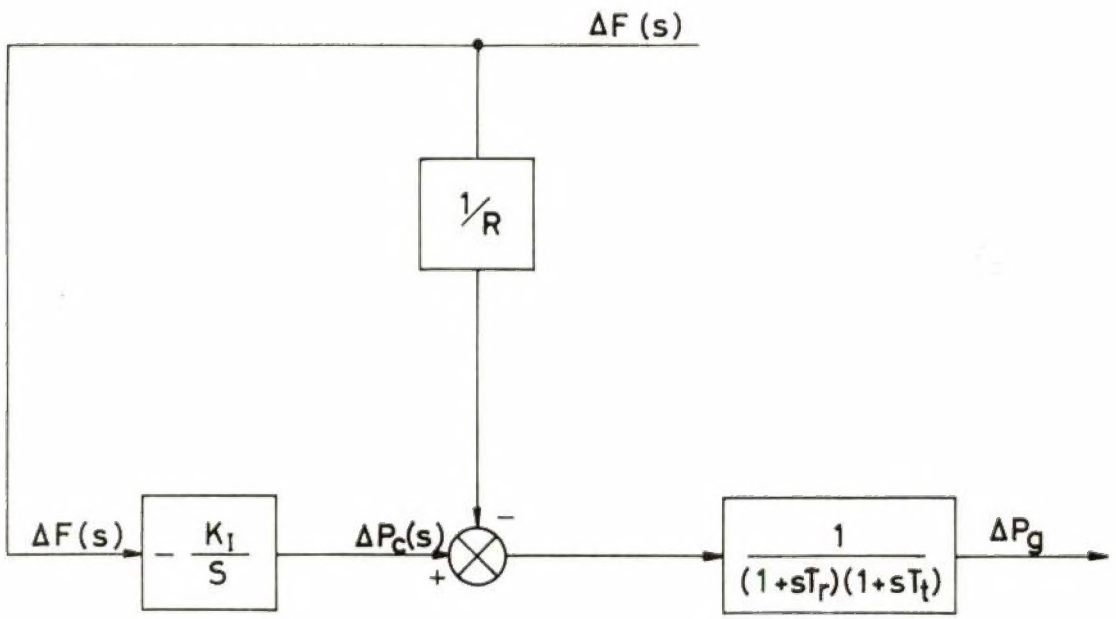


Fig. 3
La boucle de réglage avec action intégrale

1.2. Contrôle de tension et puisance réactive

Dans un système d'énergie électrique il faut maintenir un équilibre entre les puissances réactives produites et demandées, autrement il y aura une variation de tension. La tension sur le jeu de barres du poste HT de la centrale doit être maintenue à une valeur de consigne, définie par un «programme» de tension. En limitant le courant d'excitation des alternateurs on peut régler la tension, aux bornes des groupes et donc la tension sur le jeu de barres.

1.2.1. Système d'excitation et règlage de tension d'un alternateur

L'excitation de l'alternateur est faite par une excitatrice principale montée, en bout d'arbre (excitation separée), sur celui-ci. Les inducteurs de l'alternateur d'excitation sont fixes et l'induit tourne. Le courant alternatif fourni par cet alternateur est redressé en utilisant des diodes au silicium montées

excitatrice auxiliaire à aimants permanents montée sur le même arbre.

L'excitation de l'excitatrice est reglée par un amplificateur; à la sortie de cet amplificateur de réglage il y a une tension proportionelle à l'écart entre une tension de mesure $|V|$ et une tension de consigne $|V|_{cons}$. (voir fig. 4). La fonction de transfert approximative de l'amplificateur est:

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{K_A}{1+sT_A}$$

K_A — gain de l'amplificateur
T_A — constante de temps de l'amplificateur
s — variable de Laplace

La tension de mesure (tension aux bornes de la machine) est introduite à l'entrée d'un comparateur, en opposition avec la tension de consigne; le signal issu du comparateur est l'écart de tension, e:

$$e = |V|_{cons} - |V| = |V^o| - (|V^o| + \Delta |V|) = - \Delta |V|$$

RÉGULATEUR DE TENSION D'UN ALTERNATEUR
Schéma fonctionnel

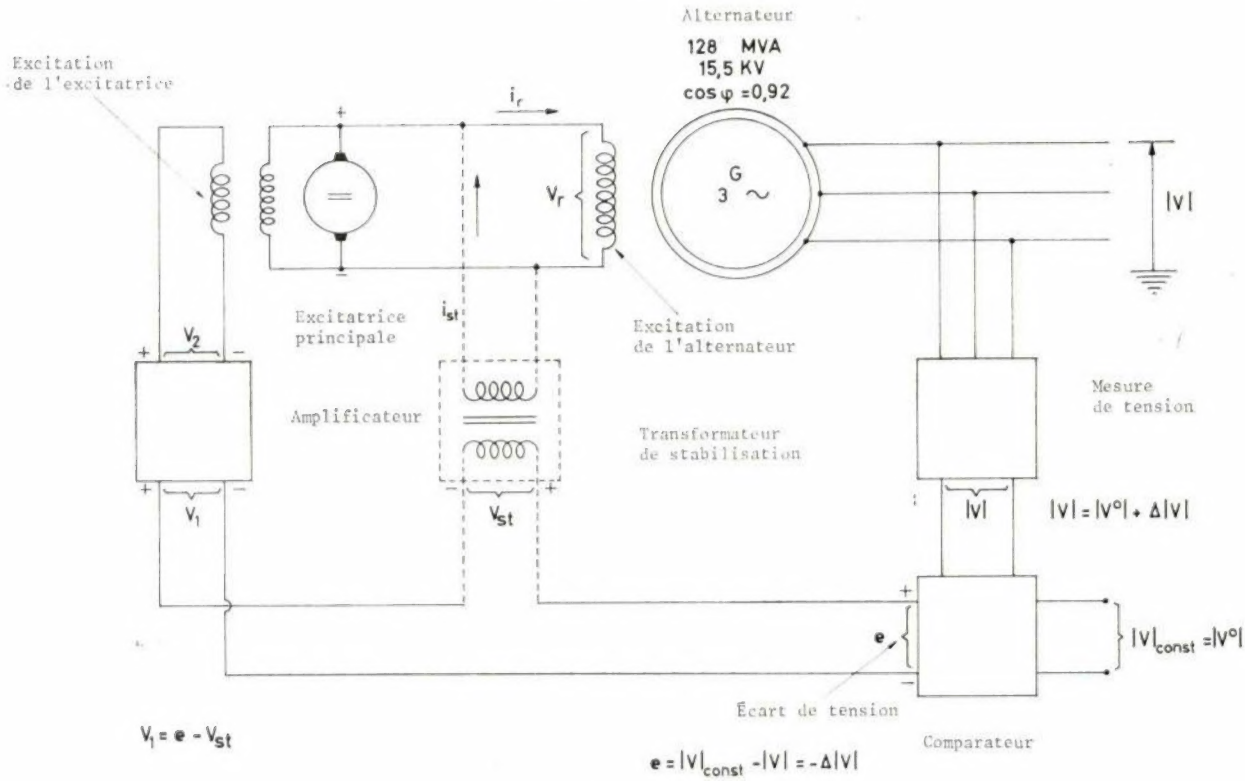


Fig. 4

1.2.2. Etablissement des fonctions de transfert d'un système de réglage de tension d'un alternateur

La fonction de transfert de l'excitatrice est du même type que celle de l'amplificateur:

$$\frac{V_r(s)}{V_2(s)} = \frac{K_E}{1+sT_E}$$

T_E, c'est la constante de temps de l'enroulement d'excitation de l'excitatrice (relation entre l'inductance et la résistance de l'enroulement).

Pour l'alternateur la fonction de transfert simplifiée sera:

$$\frac{|V|(s)}{V_r(s)} = \frac{K_r}{1+sT_r}$$

T_r, c'est la constante de temps de l'enroulement d'excitation de l'alternateur.

Pour avoir une réponse assez rapide il faut un système de stabilisation, car en ayant une constante de temps T_t très grande, on a besoin d'un gain aussi élévé.

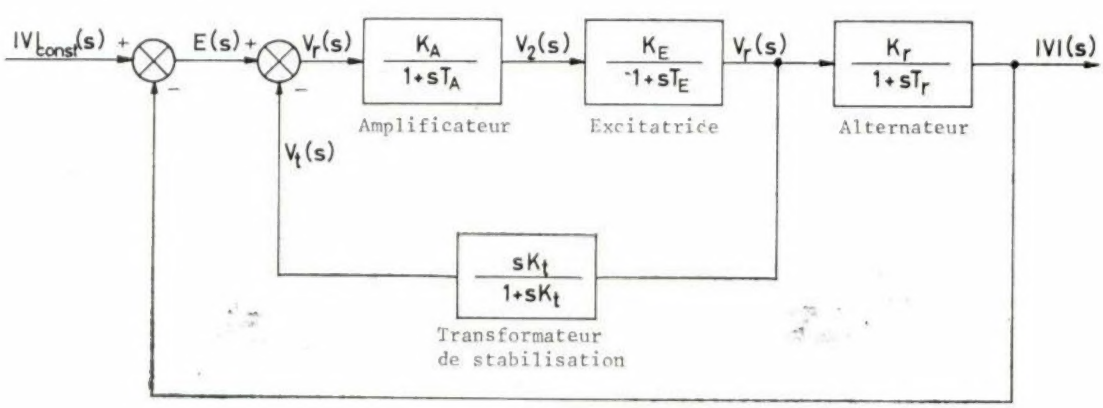


Fig. 5
La boucle du système de réglage de tension d'un alternateur

Ce système comprend un transformateur de stabilisation qui provoque une rétroaction différentielle. A la sortie de ce transformateur, la tension est:

$$v_t = M \frac{di_t}{dt}$$

M — coefficient d'induction entre les deux enroulements du transformateur

i_t — courant dans l'enroulement primaire

A l'entrée on a la tension $v_r = Ri_t + L \frac{di_t}{dt}$

R — résistance du primaire

L — coefficient d'auto-induction du primaire

La fonction de transfert du système de stabilisation sera:

$$\frac{V_t(s)}{V_r(s)} = \frac{sM}{R+sL} = \frac{sM/R}{1+sL/R} = \frac{sK_t}{1+sT_t} \simeq sK_t$$

car T_t est trop petite comparée aux autres constantes de temps, si R est très grande.

La tension de sortie du transformateur est proportionelle à la derivée de la tension d'entrée, on introduisant la rétroaction différentielle. Le système de réglage répond tant à la variation de la grandeur reglée comme à leur taux de variation.

1.2.3. Boucle simplifiée

Après l'analyse de la boucle antérieure (fig. 6) on s'obtient l'équation suivante:

$$sK_t + \frac{K_r}{1+sT_r} = \frac{sK_t\,(1+sT_r) + K_r}{1+sT_r} =$$

$$= \frac{K_r+sK_t+s^2\,K_t\,T_r}{1+sT_r} \simeq \frac{K_r+sK_t}{1+sT_r} =$$

$$= \frac{1+s\,K_t/K_r}{1+sT_r}$$

et donc la boucle simplifiée suivante (fig. 7):

2. Géneralités — Consignes

Après tout le processus analogique de l'ensemble de pilotage se sont introduis deux signaux differents dans les régulateurs de puissance de chaque groupe:

— un signal de 0 à 10mA pour la puissance active

— un signal de — 5 à + 5mA pour la puissance réactive

2.1. Puissance active (P)

La principale fonction du processus dans ce cas est la correction d'un signal correspondant à la

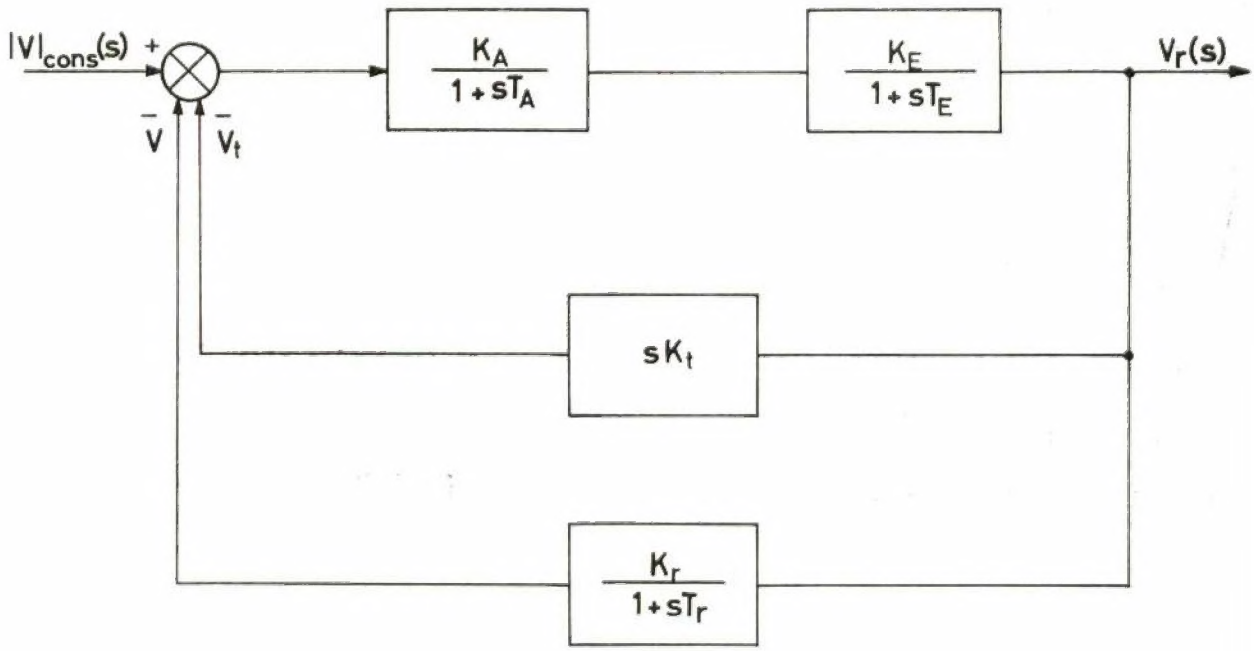


Fig. 6
La boucle du système de réglage de tension